COGNOME ______________	NON SCRIVETE QUI
NOME ______________	1 2 3
MATRICOLA	
CORSO SEGUITO Mat Fis	

UNIVERSITÀ DI PARMA — CdL in MATEMATICA e FISICA

ESAME DI ELEMENTI DI MATEMATICA 1 - TEST 3

A.A. 2019-2020 — PARMA, 4 OTTOBRE 2019

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo **in stampatello** cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di un'ora e mezza. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

Svolgete prima i calcoli in brutta, poi svolgete ordinatamente gli esercizi N.1 sul foglio a quadretti, N.2-3 su questo foglio. Completate dove richiesto.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo. Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

TEST PRELIMINARE N.3

1) Disegnate con precisione sul foglio a quadretti il grafico della seguente funzione, specificando l'equazione del grafico di ogni tratto, le coordinate dei punti di intersezione con gli assi cartesiani ed eventuali altri punti significativi:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{5}\left(x+\frac{11}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} & \text{se } -9 \le x \le -3 \\ -\frac{5}{3}x - 1 & \text{se } -3 < x < 0 \\ \log x & \text{se } \frac{1}{e^2} \le x \le e^2 \end{cases}$$

Completate:

dom f = $[-9,0[\,\cup\left[\frac{1}{e^2}, e^2\right]$ Imm f = $\left[-2,\frac{9}{2}\right]$

$f(1/e) = -1$ $f(-3) = 2$

$f^{-1}(0) = \left\{-\frac{(11+3\sqrt{5})}{2}, -\frac{3}{5}, 1\right\}$ $f^{-1}(2) = \left\{-8, -3, -\frac{9}{5}, e^2\right\}$

FACOLTATIVO

2) Determinate tutte le soluzioni delle seguenti disequazioni:

a) $x < \sqrt{6+x-x^2} + 1 \iff \ldots x \in [-2, \frac{5}{2}[$

Risposta:

$\sqrt{6+x-x^2} > x-1 \iff \begin{cases} 6+x-x^2 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$ $\underline{o}$ $\begin{cases} 6+x-x^2 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 6+x-x^2 > (x-1)^2 \end{cases}$

x^2-2x+1

$\iff \begin{cases} x \in [-2,3] \\ x < 1 \end{cases}$ sistema $\underline{o}$ $\begin{cases} x \in [-2,3] \\ x \geq 1 \\ 2x^2-3x-5 < 0 \end{cases}$ sistema $\iff x \in [-2,1[\;\underline{o}\; \begin{cases} x \in [1,3] \\ x \in]-1, \frac{5}{2}[\end{cases}$

$\iff x \in [-2,1[\;\underline{o}\; x \in [1, \frac{5}{2}[\iff x \in [-2, \frac{5}{2}[$

UNISCO LE SOL^{ni}

$6+x-x^2 \geq 0 \quad x^2-x-6 \leq 0 \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

$(x+2)(x-3) \leq 0$

$2x^2-3x-5 < 0 \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \end{cases}$

$(2x-5)(x+1) < 0$

---

b) $\sqrt{-7-3x} > -2 \iff \ldots x \in]-\infty, -\frac{7}{3}[\,.$

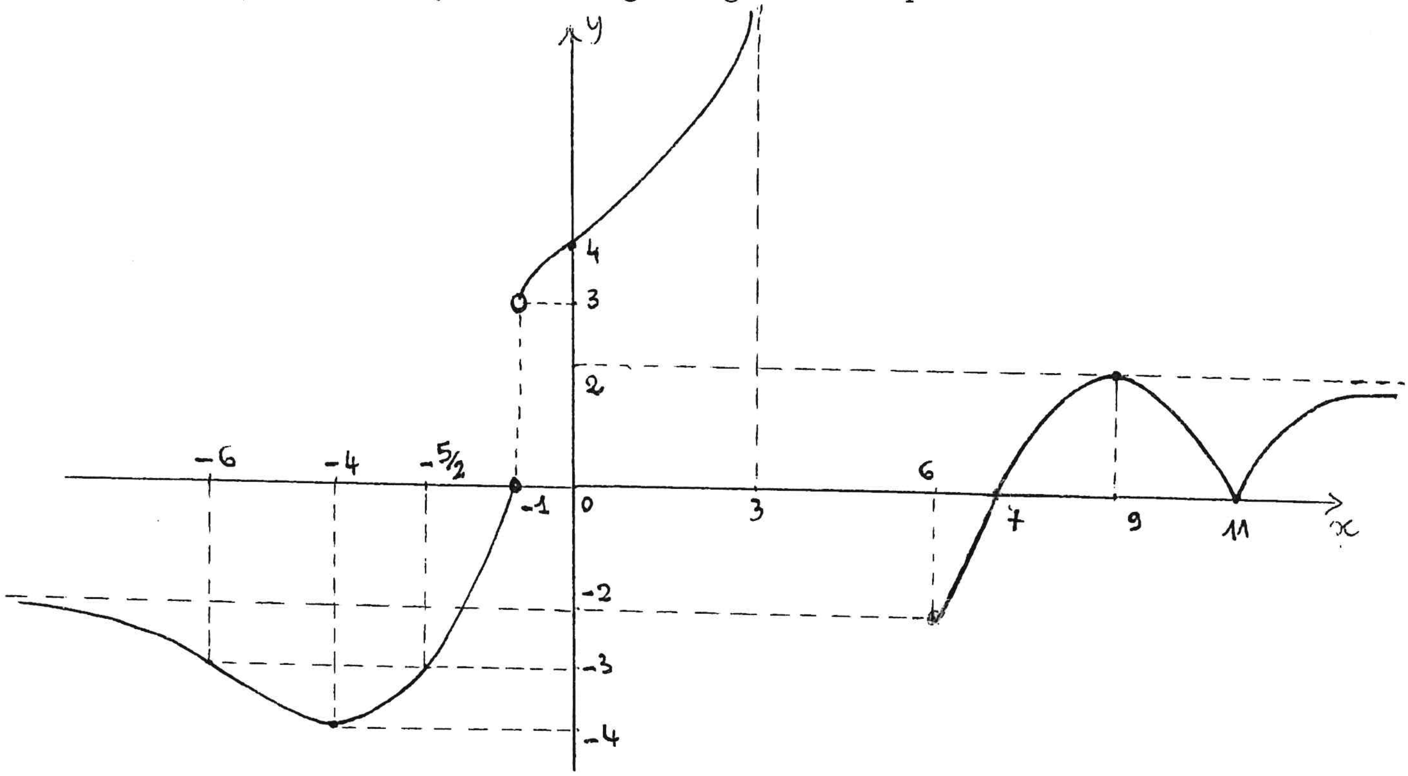
Risposta:

Poichè $\sqrt{y} \geq 0 \;\; \forall y \geq 0$ e quindi $\sqrt{y} \geq 0 > -2 \;\; \forall y \geq 0$

la disequ^{ne} è verificata $\forall x \in$ C.E., cioè

$\forall x : \; -7-3x \geq 0 \iff 3x \leq -7 \iff x \leq -\frac{7}{3}$

3) Considerate la funzione f che ha il seguente grafico e completate:



dom $f = \ldots]-\infty, 3[\cup [6, +\infty[$ Imm $f = \ldots [-4, 2] \cup]3, +\infty[$

$f(4) = \nexists \ldots$ $f(-1) = \ldots 0 \ldots$

$4 \notin$ dom$f$

$f^{-1}(-3) = \{-6, -\frac{5}{2}\}$ $f^{-1}(0) = \{-1, 7, 11\}$

Determinate il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$ per $k \in [-1, 5/2]$:

$k \in [-1, 0[$ 2 sol.^{ni}

$k \in [0, 2[$ 3 sol.^{ni}

$k = 2$ 1 sol.^{ne}

$k \in]2, \frac{5}{2}]$ 0 sol.^{ni}

La funzione f è iniettiva per $x \in]-\infty, 3[$: VERO o ~~FALSO~~

Motivazione della risposta:

ci sono due punti $x_1 \neq x_2$ con $f(x_1) = f(x_2)$

ad es. $x_1 = -6$, $x_2 = -\frac{5}{2}$ con $f(-6) = f(-\frac{5}{2}) = -3$

Determinate $f([-5, 0[\cup [6, 9]) = \ldots [-4, 2] \cup]3, 4[$

Test 4 ottobre 2019

ES. 1) $\operatorname{dom} f = [-9, 0[\cup [\frac{1}{e^2}, e^2]$

1° tratto eq.^{ne} del grafico $y = -\frac{2}{5}(x+\frac{11}{2})^2 + \frac{9}{2}$ si tratta di una PARABOLA di VERTICE $V(-\frac{11}{2}, \frac{9}{2})$ (dalla formula $y = a(x-x_v)^2 + y_v$, oppure

$y = -\frac{2}{5}x^2 - \frac{22}{5}x - \frac{38}{5}$ $\quad x_v = \frac{\frac{22}{5}}{-4/5} = -\frac{22}{4} = -\frac{11}{2}$ $\quad y_v = -\frac{\cancel{2}}{5} \cdot \frac{121}{\cancel{4}_2} + \frac{22 \cdot 11}{10} - \frac{38}{5} =$

$= -\frac{121}{10} + \frac{242}{10} - \frac{76}{10} = \frac{121-76}{10} = \frac{45}{10} = \frac{9}{2}$)

rivolta verso il basso

$x=-9 \quad y = -\frac{2}{5}(-9+\frac{11}{2})^2 + \frac{9}{2} = -\frac{2}{5}\frac{49}{4} + \frac{9}{2} = -\frac{49}{10} + \frac{45}{10} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$ $(=-0{,}4)$

$x=-3 \quad y = -\frac{2}{5}(-3+\frac{11}{2})^2 + \frac{9}{2} = -\frac{2}{5}\frac{25}{4} + \frac{9}{2} = -\frac{5}{2} + \frac{9}{2} = \frac{4}{2} = 2$

se in $x=-3$ $y=2 \Rightarrow$ anche in $x=-8$ $y=2$.

parabola $\cap$ asse x : $-\frac{2}{5}(x+\frac{11}{2})^2 + \frac{9}{2} = 0 \iff (x+\frac{11}{2})^2 = \frac{45}{4}$ $\quad x = -\frac{11}{2} \pm \frac{3\sqrt{5}}{2}$

nel nostro caso abbiamo solo $x = \frac{-11-3\sqrt{5}}{2} \simeq \frac{-11-3\cdot 2{,}25}{2} = \frac{-17{,}75}{2} = -8{,}875$

perché $-\frac{11}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2} > -3 \iff \frac{3\sqrt{5}}{2} > \frac{5}{2} \iff 3\sqrt{5} > 5 \iff 45 > 25$ V.

2° tratto : $y = -\frac{5}{3}x - 1$ retta per $(0,-1)$ e $(-3,4)$, retta $\cap$ asse x $0 = -\frac{5}{3}x - 1$

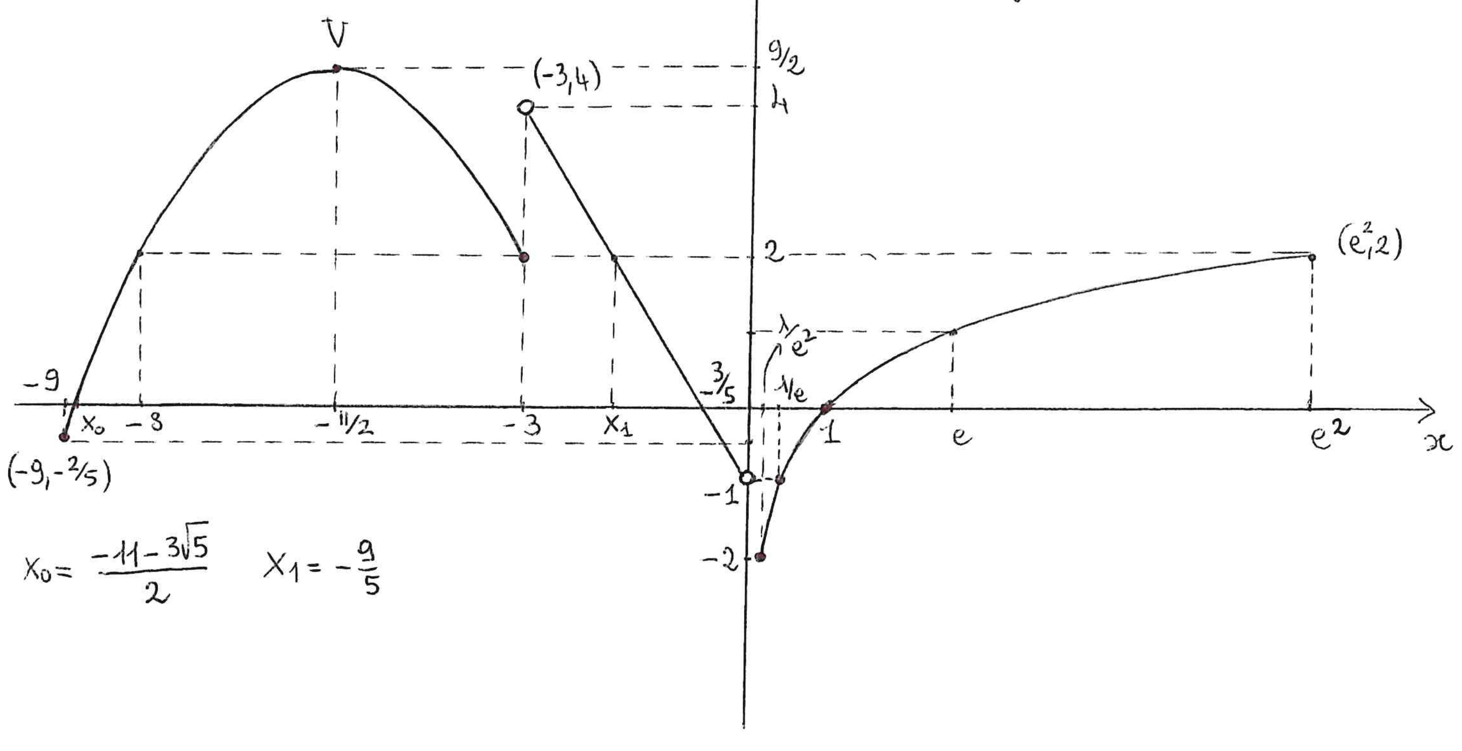
$\Updownarrow$

$x = -\frac{3}{5} = -0{,}6$

3° tratto : $y = \log x$ grafico del logaritmo da $(\frac{1}{e^2}, -2)$ a $(e^2, 2)$.

$\frac{1}{e^2} \simeq 0{,}14 \qquad e^2 \simeq 7{,}4$

$\begin{cases} y = 2 \\ y = -\frac{5}{3}x - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{9}{5} \\ y = 2 \end{cases}$



$x_0 = \frac{-11-3\sqrt{5}}{2} \qquad x_1 = -\frac{9}{5}$