

C.^{so} ELEMENTI di MATEMATICA

9 ottobre 2019 - Preparazione all'esame

1) Risolvete (senza utilizzare i casi)

a) $|x^2 - 24| = 12$

b) $|x^2 - 2x| \leq -6x$

c) $|1 + x - 2x^2| > 1$

2) Disegnate il grafico delle seguenti funzioni (dopo aver scritto l'equazione di ogni tratto, spiegato di che cosa si tratta e tutti i passaggi necessari per la costruzione del grafico)

a) $f(x) = \begin{cases} \sin |x| & -2\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \\ |\tan x| - 1 & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 1 - \log(x-2) & x > 2 \end{cases}$ (ricordate le intersezioni con gli assi)

Poi determinate $\text{dom} f$, $\text{im} f$, $f(2+\sqrt{e})$, $f^{-1}(0)$, $f([-2\pi, -\frac{5}{6}\pi])$, le soluzioni dell'equazione $f(x) = -1$.

Infine stabilite se f è suriettiva, se f è iniettiva su $[0, \frac{\pi}{2}[\cup]2, +\infty[$ e se f è iniettiva su $]2, +\infty[$ motivando la risposta.

b) $f(x) = \begin{cases} x+2 & x < -1 \\ 2 - e^{|x|} & -1 \leq x \leq 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$

Poi disegnate il grafico di $g(x) = |f(x)|$ e il grafico di $h(x) = f(|x|)$.

3) Risolvete

$3e^{x+2} < 1$

$2e^{x^2} < 1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} \geq 16$

4) Risolvere

$$\log_2(2x) - 2 \leq 0 \quad \log_{\frac{1}{2}}(3x) - 3 > 0$$

$$(\log_2 x)^2 - 2 \log_2 x \leq 0$$

5) FISICA Risolvere (con $x \in [0, 2\pi]$)

$$a) 4 \sin x \cos x - 2 \sin x + 2\sqrt{3} \cos x - \sqrt{3} = 0$$

$$b) \tan x (1 - 2 \sin x) = 0$$

MATEMATICA a) $4 \sin x \cos x - 2 \sin x + 2\sqrt{3} \cos x - \sqrt{3} > 0$

$$b) \tan x (1 - 2 \sin x) < 0$$

6) MATEMATICA

a) Negate la proposizione

$$\forall z \geq 1 \quad \exists y < 1 : \forall x > 0 \quad P(x, y, z) \subseteq Q(x, y, z)$$

$$b) x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow \dots$$

c) Siano A e B due sottoinsiemi generici di $\mathbb{R}$.

○ Stabilite se è vera o falsa la seguente proposizione

$$P = " \forall A, B \quad A \subseteq B \subseteq B \subseteq A "$$

○ Negate la proposizione P .

ESERCIZI in CLASSE del 9 ottobre 2019

1) a) Essendo $12 > 0$ $|x^2 - 24| = 12 \Leftrightarrow x^2 - 24 = 12 \vee x^2 - 24 = -12$

$\Leftrightarrow x^2 = 36 \vee x^2 = 12 \Leftrightarrow x = \pm 6 \vee x = \pm \sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$

Sol.ⁿⁱ $\{ x = \pm 6, x = \pm 2\sqrt{3} \}$

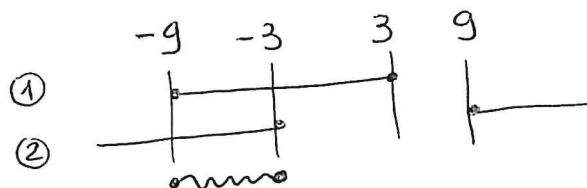
b) $|x^2 - 27| \leq -6x \Leftrightarrow -(-6x) \leq x^2 - 27 \leq -6x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x - 27 \leq 0 \\ x^2 - 6x - 27 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 \leq x \leq 3 \quad (1) \\ x \leq -3 \vee x \geq 9 \quad (2) \end{cases}$

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 6}{1} \begin{cases} x_1 = -9 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Mettendo a sistema le due sol.ⁿⁱ otteniamo

Sol.ⁿⁱ $x \in [-9, -3]$



c) $|1 + x - 2x^2| > 1 \Leftrightarrow 1 + x - 2x^2 > 1 \vee 1 + x - 2x^2 < -1$

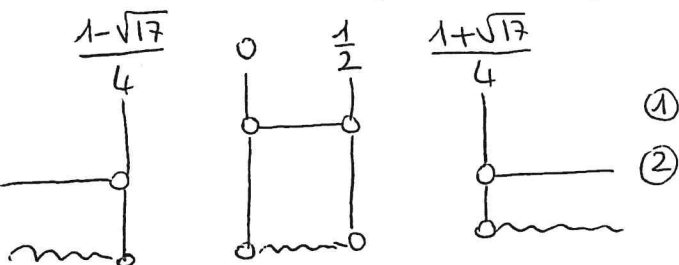
$\Leftrightarrow 2x^2 - x < 0 \vee 2x^2 - x - 2 > 0$ $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$

$\Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{2} \vee \left(x < \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \vee x > \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \right)$

(1)

(2)

Dobbiamo unire le due sol.ⁿⁱ



(1)

(2)

Sol.ⁿⁱ $x \in]-\infty, \frac{1 - \sqrt{17}}{4}[\cup]0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1 + \sqrt{17}}{4}, +\infty[$

2) a) Si tratta di una funzione definita in 3 tratti.

1° tratto eq.^{ue} del grafico $y = \sin|x|$ per $[-2\pi, -\frac{\pi}{2}]$: questa

funzione ha come grafico il grafico $y = \sin x$ per $x \geq 0$ e il simmetrico di $y = \sin x$ rispetto all'asse y se $x < 0$ ($y = \sin(-x)$ se $x < 0$).

9/10/2019

-2-

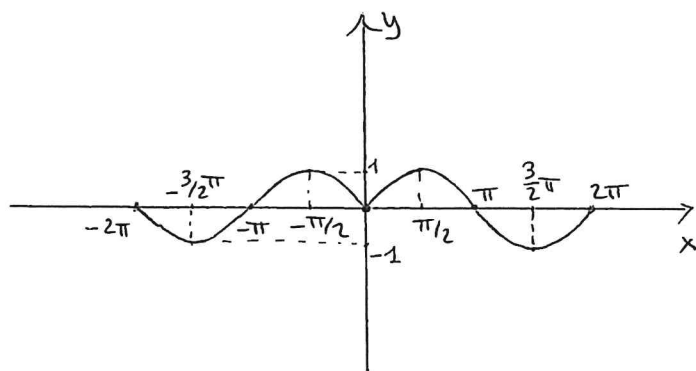


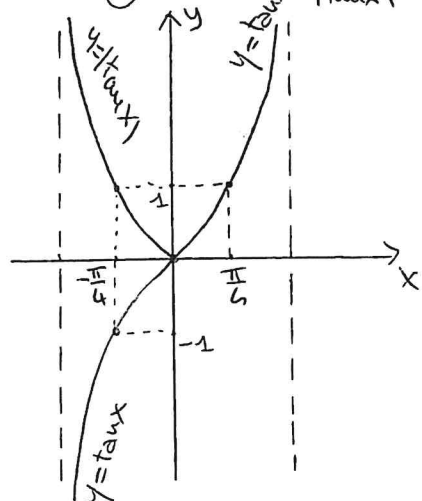
grafico di $y = \sin|x|$
per $x \in [-2\pi, 2\pi]$

2° tratto eq.^{ue} del grafico $y = |\tan x| - 1$ per $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$y = \tan x$ grafico della tangente

$y = |\tan x|$ coincide con $y = \tan x$ dove $\tan x \geq 0$
mentre è il simmetrico di $y = \tan x$ rispetto
all'axe x quando $\tan x < 0$.

$y = |\tan x| - 1$ il grafico $y = |\tan x|$ viene abbassato di 1

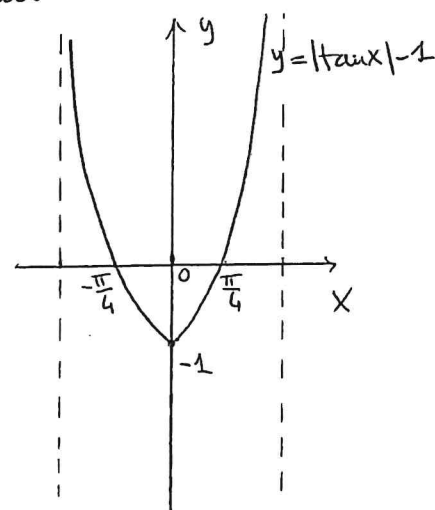
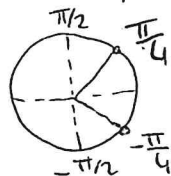


Nasce x $|\tan x| = 1$ $\tan x = \pm 1$
gli angoli $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ in cui $\tan x = \pm 1$ sono

$$x = \pm \frac{\pi}{4}$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$$

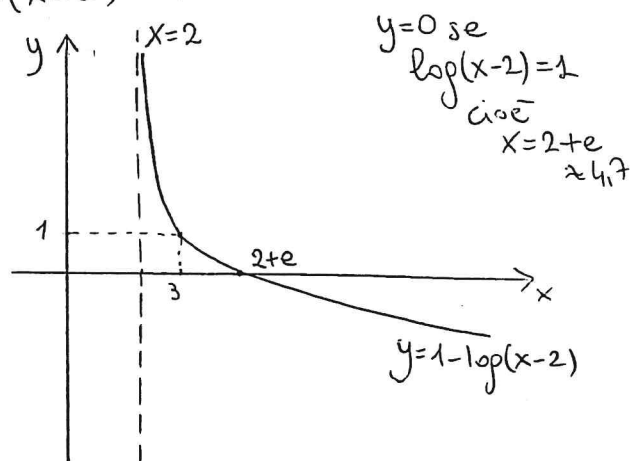
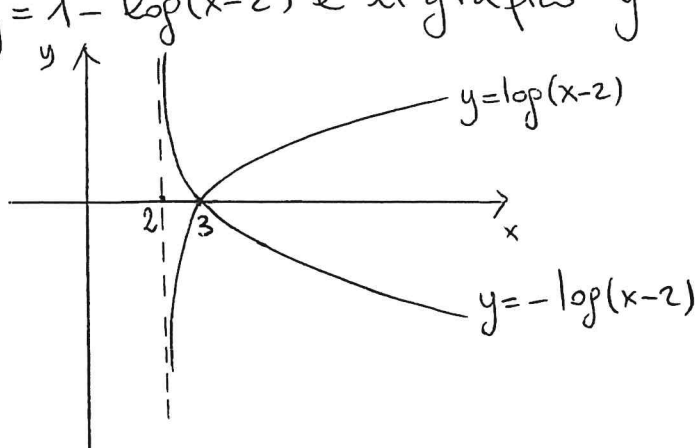


3° tratto eq.^{ue} del grafico $y = 1 - \log(x-2)$

$y = \log(x-2)$ (def per $x > 2$) è il grafico
del logaritmo $y = \log x$ a ds di 2

$y = -\log(x-2)$ è il simmetrico del grafico $y = \log(x-2)$ rispetto all'axe x

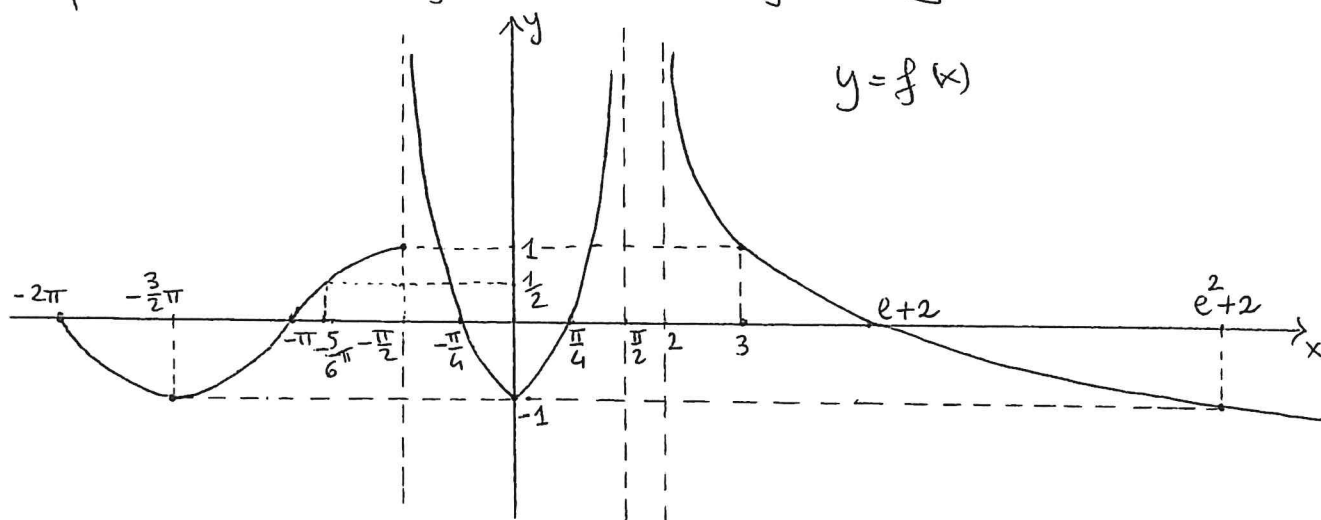
$y = 1 - \log(x-2)$ è il grafico $y = -\log(x-2)$ in alto di 1.



$y = 0$ se
 $\log(x-2) = 1$
cioè
 $x = 2 + e$
 $\approx 4,7$

Complessivamente la funzione ha il seguente grafico

9/10/19
-3-



$$\text{dom } f = [-2\pi, \frac{\pi}{2}[\cup]2, +\infty[\quad \text{Im } f = \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ è SURIETTIVA}$$

$$f(2+\sqrt{e}) = 1 - \log(2+\sqrt{e}-2) = 1 - \log \sqrt{e} = 1 - \log e^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f^{-1}(0) = \{-2\pi, -\pi, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 2+e\}$$

$$f([-2\pi, -\frac{5}{6}\pi]) = [-1, \sin|-\frac{5}{6}\pi|] = [-1, \sin \frac{5}{6}\pi] = [-1, \frac{1}{2}]$$

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}\pi \vee x = 0 \vee x = e^2 + 2$$

f non è INIETTIVA su $[0, \frac{\pi}{2}[\cup]2, +\infty[$ perché $\forall k \geq 1 \quad f^{-1}(k)$

contiene due elementi distinti: ad es. $f^{-1}(0) = \{\frac{\pi}{4}, 2+e\}$

oppure $f^{-1}(-1) = \{0, 2+e^2\}$. Invece f è iniettiva su $]2, +\infty[$

perché su tale intervallo f è STRETTAMENTE DECRESCENTE.

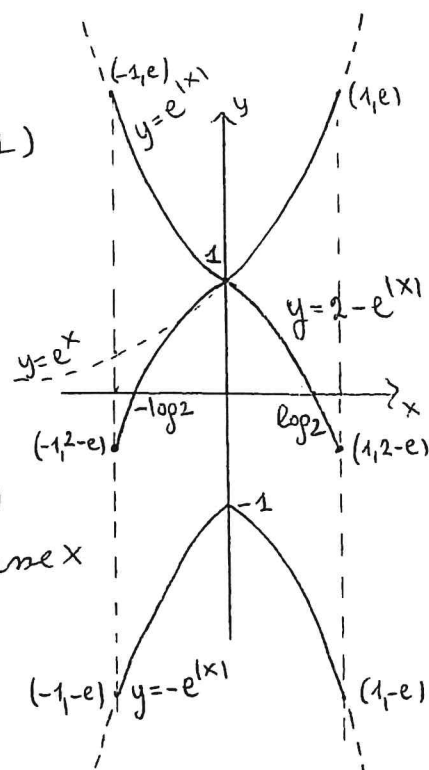
b) Dimuovo 3 tratti.

1° tratto eq.^{ue} $y = x + 2$ retta per $(-2, 0)$ e $(-1, 1)$

2° tratto eq.^{ue} $y = 2 - e^{|x|}$ per $x \in [-1, 1]$

$y = e^{|x|}$ è il grafico dell'esponenziale $y = e^x$ se $x \geq 0$ mentre è il simmetrico di $y = e^x$ rispetto all'asse y per $x < 0$ ($e^{|x|} = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ e^{-x} & x < 0 \end{cases}$)

$y = -e^{|x|}$ è il simmetrico di $y = e^{|x|}$ rispetto all'asse x
 $y = 2 - e^{|x|}$ è il grafico di $y = -e^{|x|}$ in alto di 2



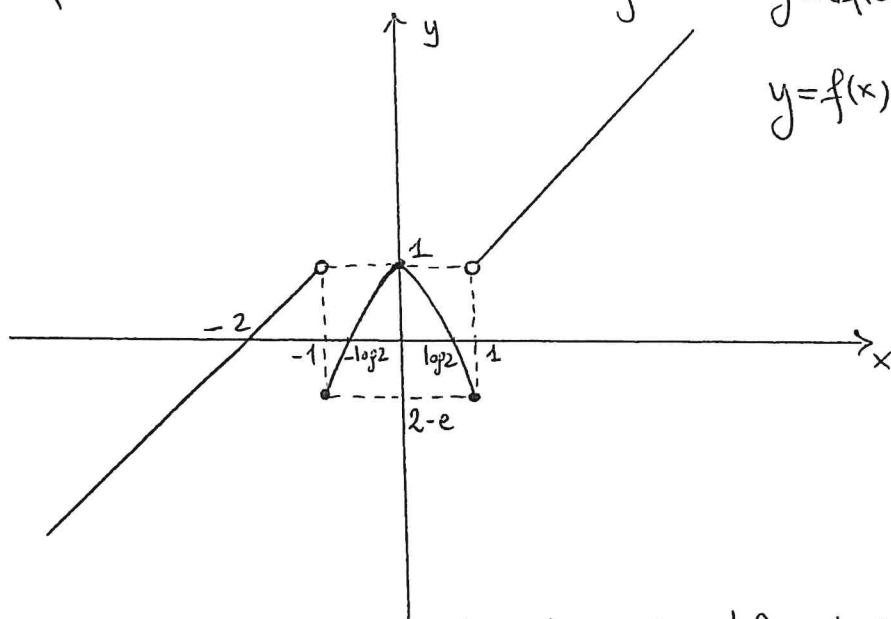
2° tratto $\cap$ ane x $e^{|x|} - 2 = 0$ $e^{|x|} = 2$ $e^{|x|} = e^{\log 2}$

9/10/19
-4-

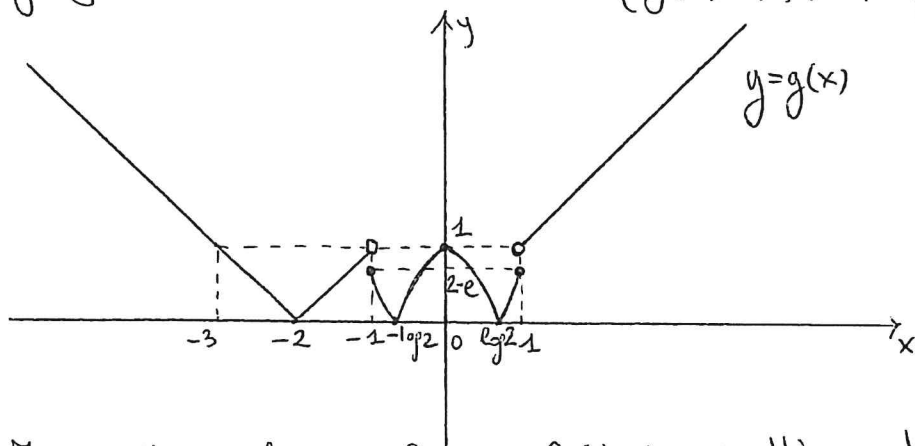
$|x| = \log 2$ $x = \pm \log 2 \approx \pm 0,7$

3° tratto eq.^{ue} $y = x$ $x > 1$ grafico della bisettrice del 1° e 3° quadrante.

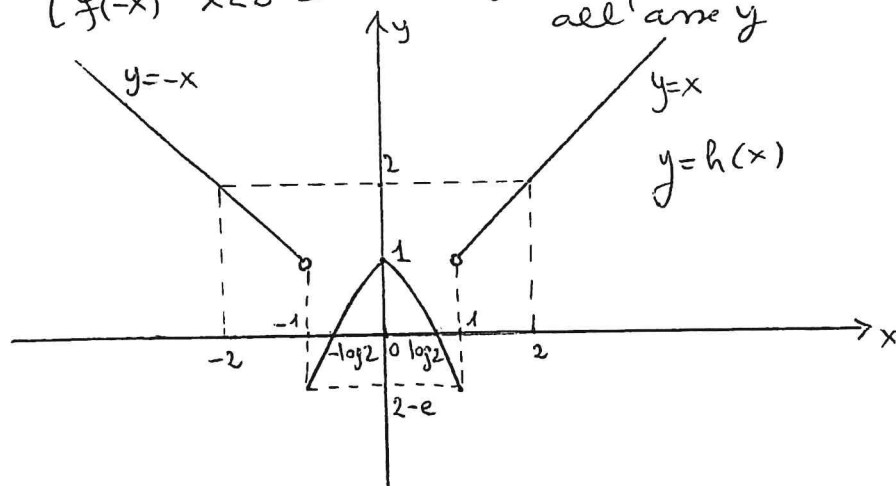
Complessivamente avremo il seguente grafico:



da cui si ottiene il grafico di $g(x) = |f(x)|$ ribaltando la parte di grafico al di sotto dell'asse x ($g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$)



Invece il grafico di $h(x) = f(|x|)$ si ottiene dal grafico di $f(x)$ con $h(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}$ cioè grafico simmetrico di $y = f(x)$ rispetto all'asse y



Il grafico di h è simmetrico rispetto all'asse y

$$\text{ES.3)} \quad 3e^{x+2} < 1 \Leftrightarrow e^{x+2} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow e^{x+2} < e^{\log \frac{1}{3}}$$

9/10/19 - 5 -

$$\Leftrightarrow x+2 < \log \frac{1}{3} \Leftrightarrow x < -2 - \log 3$$

$$2e^{x^2} < 1 \Leftrightarrow e^{x^2} < \frac{1}{2} = e^{\log \frac{1}{2}} \Leftrightarrow x^2 < \log \frac{1}{2} = -\log 2 < 0$$

la dise. non ha sol. (x^2 < a < 0 sol. $\emptyset$)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} \geq 16 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \Leftrightarrow 2x+3 \leq -4 \Leftrightarrow 2x \leq -7$$

$$\Leftrightarrow x \leq -\frac{7}{2} \quad (\text{oppure } 2^{-2x-3} \geq 2^4 \Leftrightarrow -2x-3 \geq 4 \Leftrightarrow 2x \leq -7 \Leftrightarrow x \leq -\frac{7}{2})$$

$$\text{ES.4)} \quad \log_2(2x) - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 0 \text{ (c.e.)} \\ \log_2(2x) \leq 2 = \log_2 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 2$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x) > 3 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(3x) > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3x < \frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{24}$$

$$(\text{oppure } \log_{\frac{1}{2}} x = -\log_2 x \quad -\log_2(3x) > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > 0 \\ \log_2(3x) < -3 = \log_2 2^{-3} \end{cases})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3x < 2^{-3} = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{24}$$

$$(\log_2 x)^2 - 2\log_2 x \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x (\log_2 x - 2) \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{Dis. Prodotto } (F_1) \log_2 x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

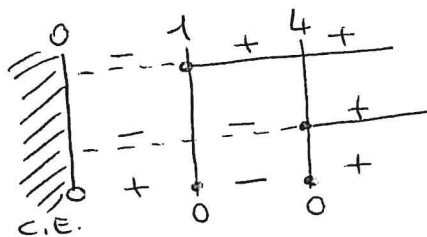
= 0 se x = 1

$$(F_2) \log_2 x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \log_2 x \geq 2 = \log_2 4$$

$$\Leftrightarrow x \geq 4$$

$$\log_2 x \uparrow$$

$$F_1 \cdot F_2 \leq 0 \text{ se } x \in [1, 4]$$



5) FISICA

9/10/19 -6-

a) $4 \sin x \cos x - 2 \sin x + 2\sqrt{3} \cos x - \sqrt{3} = 0$

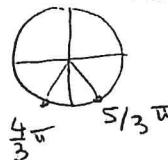
$2 \sin x (2 \cos x - 1) + \sqrt{3} (2 \cos x - 1) = 0$

$(2 \sin x + \sqrt{3}) \cdot (2 \cos x - 1) = 0$ Eq. ^{ue} prodotto



$2 \sin x + \sqrt{3} = 0 \quad \vee \quad 2 \cos x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad \cos x = \frac{1}{2}$

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



$\cos x = \frac{1}{2}$

Sol. ^{ue} $x = \frac{\pi}{3} \quad \vee \quad x = \frac{4}{3}\pi \quad \vee \quad x = \frac{5}{3}\pi$

b) $\tan x (1 - 2 \sin x) = 0$

C.E. $\cos x \neq 0$ quindi se $x \in [0, 2\pi]$

$x \neq \frac{\pi}{2} \quad \vee \quad x \neq \frac{3}{2}\pi$

eq. ^{ue} prodotto

$0 = 0 \quad \tan x = 0 \quad \vee \quad 1 - 2 \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = 0 \quad \vee \quad \sin x = \frac{1}{2}$

$\pi \quad 0, 2\pi \quad \tan x = 0 \quad \frac{5}{6}\pi \quad \frac{\pi}{6} \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad \text{Sol. ^{ue} } x = 0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

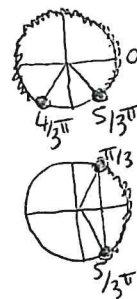
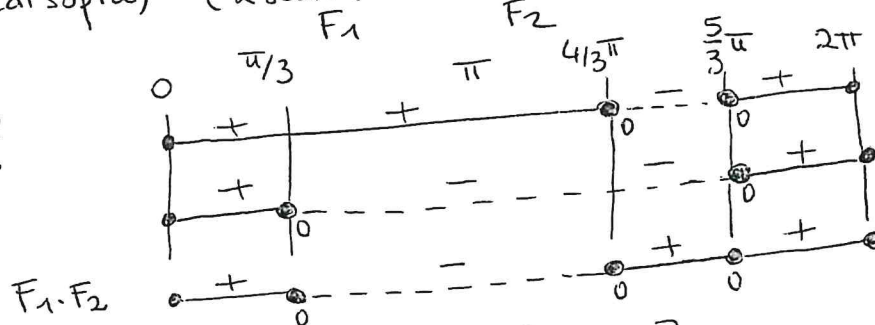


MATEMATICA

a) (vedi sopra) $(2 \sin x + \sqrt{3}) \cdot (2 \cos x - 1) > 0$

$F_1 \geq 0 \quad \sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$F_2 \geq 0 \quad \cos x \geq \frac{1}{2}$



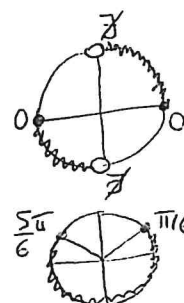
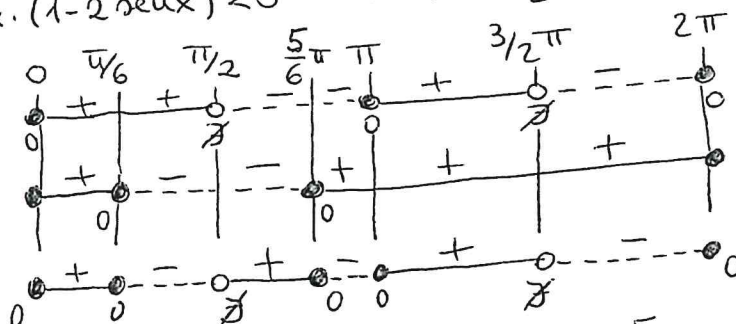
Sol. ^{ue} $F_1 \cdot F_2 > 0$ se $x \in [0, \frac{\pi}{3}[\cup] \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi[\cup] \frac{5}{3}\pi, 2\pi]$

b) (vedi sopra) $\tan x \cdot (1 - 2 \sin x) < 0$ C.E. $x \neq \frac{\pi}{2}, x \neq \frac{3}{2}\pi$

$F_1 \geq 0 \quad \tan x \geq 0$

$F_2 \geq 0 \quad \sin x \leq \frac{1}{2}$

$F_1 \cdot F_2$



Sol. ^{ue} $F_1 \cdot F_2 < 0$ se $x \in] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[\cup] \frac{5}{6}\pi, \pi[\cup] \frac{3}{2}\pi, 2\pi[$

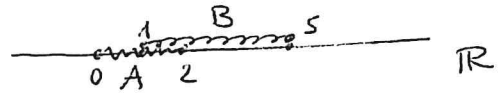
$$6) a) \exists z > 1 : \forall y < 1 \exists x > 0 :$$

9/10/19 - 7 -

$$\text{NON } P(x,y,z) \subseteq \text{NON } Q(x,y,z)$$

$$b) x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ o } x \notin B$$

c) La proposizione P è FALSA perché basta considerare ad es. $A = [0, 2]$ $B = [1, 5]$



per avere un controesempio :

infatti non è vero che $A \subseteq B$ (i punti $x \in [0, 1[$ appartengono ad A ma non a B) e neanche che $B \subseteq A$ (i punti $x \in]2, 5]$ appartengono a B ma non ad A).

Si possono considerare anche insiemi disgiunti ($A \cap B = \emptyset$) come ad es. $A = [0, 1]$ $B = [3, 4]$, o anche costituiti da un solo elemento ($A = \{1\}$, $B = \{2\}$).

$$\text{NON } P \Leftrightarrow \exists A, B \text{ sottoinsiemi di } \mathbb{R} :$$

$$\text{NON } (A \subseteq B) \subseteq \text{NON } (B \subseteq A)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x : x \in A \wedge x \notin B) \subseteq (\exists x : x \in B \wedge x \notin A)$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \ x \in A \Rightarrow x \in B$$

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x \ x \in B \Rightarrow x \in A$$

quest'ultima scrittura significa che

$$A \setminus B \neq \emptyset \subseteq B \setminus A \neq \emptyset$$

che ci aiuterebbe a capire come costruire un controesempio per dim. che P è falsa, se non l'avessimo già trovato.