

f) Disegnate con precisione sul foglio a quadretti la retta r di equazione $4x + 4y - 2 = 0$.

A pag. 6

L'equazione della retta s perpendicolare alla retta r e passante per il punto

$$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ è } \dots y = x$$

Disegnate la retta s .

Il punto di intersezione tra le due rette r e s è $\dots \left(\frac{1}{4} \mid \frac{1}{4}\right)$

g) Determinate e disegnate tutte le soluzioni $x \in [0, 2\pi]$ dell'equazione

A pag. 6

$$2 \cos^3 x + 3 \sin x \cos x = 0 \iff \dots x \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi \right\}$$

h) (MAT) Determinate tutte le soluzioni $x \in [0, 2\pi]$ del seguente sistema $\begin{cases} \cos x \leq 0 \\ \sin x < -\frac{1}{2} \end{cases}$.

A pag. 7

$$S = \left] \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi \right]$$

i) Disegnate sul foglio a quadretti con precisione (dominio, equazione del grafico, tutti i passaggi necessari per la costruzione, intersezioni con gli assi coordinati, punti significativi, asintoti) il grafico delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \log(x + 4), \quad g(x) = -1 + \sqrt{x - 4}.$$

A pag. 7

$$1) |f(x)| \geq g(x) \iff \dots f(x) \leq -g(x) \text{ o } f(x) \geq g(x)$$

$$|x^2 - 4x + \frac{5}{2}| \geq 6x - \frac{13}{2} \iff \dots x \in]-\infty, -1 + \sqrt{5}] \cup [9, +\infty[$$

2) a) Disegnate con precisione sul foglio a quadretti il grafico della seguente funzione (in parte disegnata nella parte preliminare punto i)), specificando l'equazione del grafico di ogni tratto, tutti i passaggi necessari per la costruzione di ogni tratto, le coordinate dei punti di intersezione con gli assi cartesiani, gli asintoti e eventuali altri punti significativi:

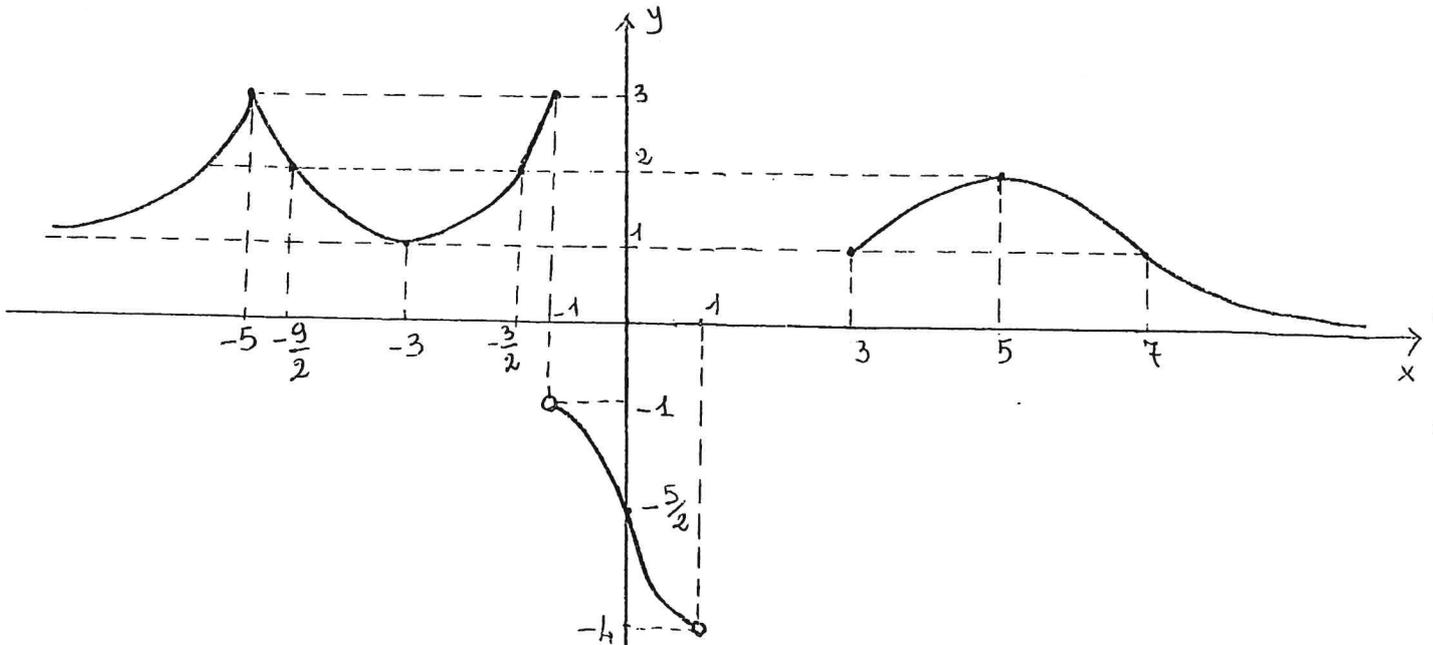
$$f(x) = \begin{cases} |\log(x + 4)| - 1 & \text{se } -4 < x \leq e^2 - 4 \\ -(-1 + \sqrt{x - 4}) & \text{se } 4 \leq x \leq 13 \end{cases}$$

$$\text{dom } f = \dots \dots \dots]-4, e^2 - 4] \cup [4, 13] \quad \text{Imm } f = \dots \dots \dots [-2, +\infty[$$

$$f\left(\frac{1}{e^2} - 4\right) = \dots \frac{1}{e^2} \quad f(8) = \dots -1 \quad f^{-1}(0) = \dots \left\{ -4 + \frac{1}{e}, -4 + e, 5 \right\}$$

b) Disegnate con precisione il grafico della funzione $g(x) = f(|x|)$.

3) Considerate la funzione f che ha il seguente grafico:



dom $f =]-\infty, 1[\cup [3, +\infty[$ Imm $f =]-4, -1[\cup]0, 3]$

$f(-1) = 3$ $f(1) = -4$ $f^{-1}(1) = \{-3, 3, 7\}$
1 & down

Determinate sul foglio a quadretti il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$ per $k \in [0, 2]$.
 $k=0$ nessuna sol.^{ue} $k \in]1, 2[$ 5 sol.^{ue}
 $k \in]0, 1[$ 1 sol.^{ue} $k=2$ 4 sol.^{ue}
 $k=1$ 3 sol.^{ue}

La funzione f è strettamente decrescente per $x \in [-3, 1[$: VERO o **FALSO**

MOTIVAZIONE: f strett. decresc su $[-3, 1[$ se $\forall x_1, x_2 \in [-3, 1[\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
 f non è strett. decresc su $[-3, 1[$ se $\exists x_1, x_2 \in [-3, 1[\quad x_1 < x_2 \wedge f(x_1) \leq f(x_2)$.

Basta considerare $x_1 = -3 < x_2 = -3/2 \wedge f(x_1) = f(-3) = 1 < f(x_2) = f(-3/2) = 2$

Determinate $f\left(-\frac{9}{2}, 1\right) =]-4, -1[\cup]1, 3]$

A pag. 8
 4)

Disegnate con precisione sul foglio a quadretti l'insieme di equazione $9x^2 - 4y^2 = 36$, dopo aver spiegato che cosa rappresenta e le sue caratteristiche.

(MAT) Determinate le intersezioni della figura precedente con la circonferenza di $C(0, 0)$

e $R = \frac{\sqrt{3}\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ individuandole anche sul disegno.

A pag. 7-8

5) Determinate tutte le soluzioni della disequazione $\frac{\log(5x^2 + 4x)}{-2x^2 + x + 1} < 0$.

Risposta: $\dots x \in]-\infty, -1[\cup]0, \frac{1}{5}[\cup]1, +\infty[$.

SOLUZIONE

es. 0) a) $x(3x^3 - 7x^2 + 5x - 1) > 0$

Decomponiamo $P(x) = 3x^3 - 7x^2 + 5x - 1 : P(1) = 3 - 7 + 5 - 1 = 0$,
quindi $P(x)$ è divisibile per $(x-1)$ e si ottiene

$P(x) = (x-1)(3x^2 - 4x + 1)$

essendo $3x^2 - 4x + 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm 1}{3} = \begin{cases} \rightarrow x_1 = \frac{1}{3} \\ \rightarrow x_2 = 1 \end{cases}$

Concludiamo che $P(x) = (x-1)^2(3x-1)$.

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 \quad | \quad x-1 \\ \underline{2x^3 - 2x^2} \\ -3x^2 + 4x - 1 \\ \underline{-3x^2 + 3x} \\ -x - 1 \\ \underline{-x - 1} \\ 0 \end{array}$$

Allora abbiamo $x \cdot (x-1)^2 \cdot (3x-1) > 0$

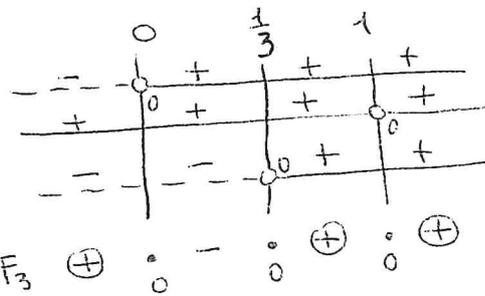
$F_1 \cdot F_2 \cdot F_3$

Dis^{ue}
PRODOTTO

$F_1 = x > 0 \quad F_1 = 0 \text{ se } x = 0$

$F_2 = (x-1)^2 > 0 \quad \forall x \neq 1 \quad F_2 = 0 \text{ se } x = 1$

$F_3 = 3x-1 > 0 \text{ se } x > \frac{1}{3} \quad F_3 = 0 \text{ se } x = \frac{1}{3}$



$F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ o } \frac{1}{3} < x < 1 \text{ o } x > 1$ da cui

$A =]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{3}, 1[\cup]1, +\infty[$

b) Separiamo i numeri positivi dai negativi:

$5\sqrt{3} - 8 < 0 \Leftrightarrow 5\sqrt{3} < 8 \Leftrightarrow 25 \cdot 3 < 64 \Leftrightarrow 75 < 64 \text{ (F)}$

$5\sqrt{3} - 8 > 0$

elevo(.)²
sono entrambi
positivi

N^{e} negativi: $-6, -\sqrt{5}$

N^{e} positivi: $5\sqrt{3} - 8, \frac{2}{3}$

$-6 < -3 = -\sqrt{9} < -\sqrt{5} \Rightarrow -6 < -\sqrt{5}$

$5\sqrt{3} - 8 > \frac{2}{3} \Leftrightarrow 5\sqrt{3} > 8 + \frac{2}{3} = \frac{26}{3}$

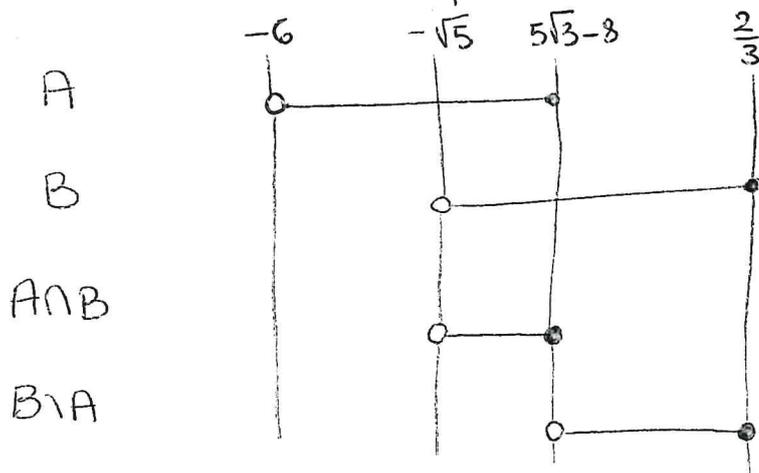
$\Leftrightarrow 15\sqrt{3} > 26 \Leftrightarrow 225 \cdot 3 > 26^2 \Leftrightarrow 675 > 676 \text{ (F)}$

$\frac{2}{3} > 5\sqrt{3} - 8$

L'ordine crescente è pertanto -6 $-\sqrt{5}$ $5\sqrt{3}-8$ $\frac{2}{3}$

11/10/19 - Mat/Fis

-5B-



$$A \cap B =] -\sqrt{5}, 5\sqrt{3}-8]$$

$$B \setminus A =] 5\sqrt{3}-8, \frac{2}{3}]$$

$$c) \sqrt{4x} < 3x \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \geq 0 \\ 3x \geq 0 \\ 4x < (3x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 9x^2 - 4x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x(9x-4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 0 \text{ o } x > \frac{4}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in]\frac{4}{9}, +\infty[$$

$$e) [\log_5 (e^{-2 \log 5})]^{-3} = [\log_5 (e^{\log 5^{-2}})]^{-3} = [\log_5 5^{-2}]^{-3} =$$

$$\downarrow m \log_a b = \log_a b^m$$

$$\downarrow e^{\log_e x} = x \quad \forall x > 0$$

$$5^{-2} = \frac{1}{25} > 0$$

$$= [-2]^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$$

$$\downarrow \log_5 5^x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

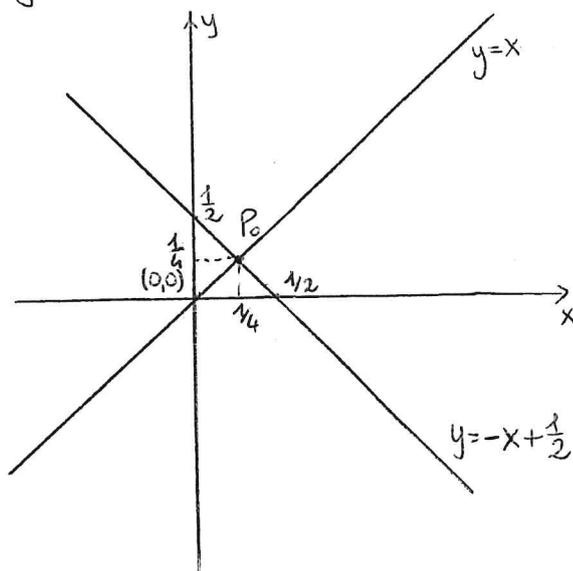
f) $4y = -4x + 2 \quad y = -x + \frac{1}{2}$ retta di coeff. angolare $m = -1$ per $(0, \frac{1}{2})$ e $(\frac{1}{2}, 0)$

$$m_s = -\frac{1}{m_r} = +1 \quad y = -\sqrt{2} + (x + \sqrt{2})$$

retta s: $y = +x$

$$r \cap s \begin{cases} y = +x \\ y = -x + \frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} \dots \\ x = -x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dots \\ 2x = +\frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \quad P_0 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$$



g) $\cos x (2 \cos^2 x + 3 \sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \quad \text{or}$$

$$2(1 - \sin^2 x) + 3 \sin x = 0$$

\downarrow
 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
 legge di annullamento
 del prodotto

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \quad \text{or} \quad 2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$$

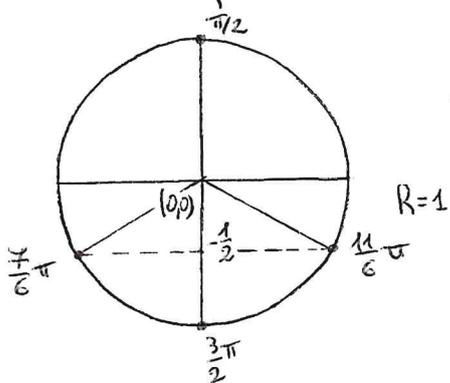
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad \text{or} \quad 2t^2 - 3t - 2 = 0 \quad t_{1,2} = \frac{+3 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \quad \text{or} \quad \sin x = 2 \quad \text{or} \quad \sin x = -\frac{1}{2}$$

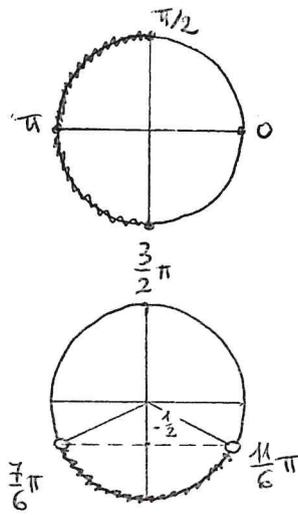
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad \text{or} \quad \text{nessuna sol.}^{\text{ve}} \quad \text{or} \quad x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

perché $\sin x \leq 1 < 2$
 $\forall x$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6} \right\}$$



h) (MAT) $\cos x \leq 0 \Leftrightarrow x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$
 $\sin x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in]\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi[$



(eq. $\sin x = -\frac{1}{2}$ risulta nell'es g))

$$\begin{cases} x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi] \\ x \in]\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi[\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x \in]\frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi]} = S$$

ES.1) $|x^2 - 4x + \frac{5}{2}| \geq 6x - \frac{13}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + \frac{5}{2} \leq -6x + \frac{13}{2} \quad \cup \quad x^2 - 4x + \frac{5}{2} \geq 6x - \frac{13}{2}$

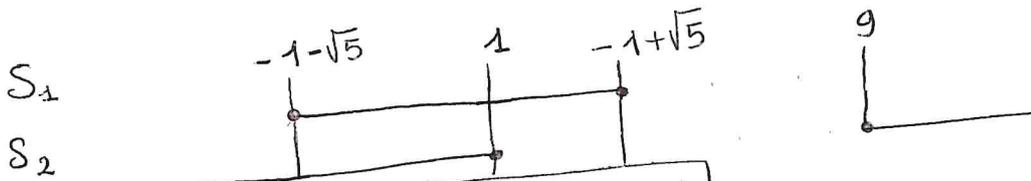
$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 \leq 0 \quad \cup \quad x^2 - 10x + 9 \geq 0$

$\Leftrightarrow -1 - \sqrt{5} \leq x \leq -1 + \sqrt{5} \quad \cup \quad (x \leq 1 \quad \cup \quad x \geq 9)$

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{5}$

$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{16} = 5 \pm 4 < \begin{matrix} 9 \\ 1 \end{matrix}$

$-1 - \sqrt{5} < 0 \quad -1 + \sqrt{5} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{5} > 2 \Leftrightarrow 5 > 4 \text{ (V)}$



$S_1 \cup S_2 =]-\infty, -1 + \sqrt{5}] \cup [9, +\infty[= S$

ES.5) $\frac{\log(5x^2 + 4x)}{-2x^2 + x + 1} < 0$

C.E. $\begin{cases} x(4x+3) > 0 \\ 5x^2 + 4x > 0 \\ -2x^2 + x + 1 \neq 0 \end{cases} \begin{cases} x < -\frac{4}{5} \cup x > 0 \\ x \neq -\frac{1}{2} \cap x \neq 1 \end{cases}$
 $2x^2 - x - 1 \neq 0$
 $x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} \quad \begin{matrix} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = 1 \end{matrix}$

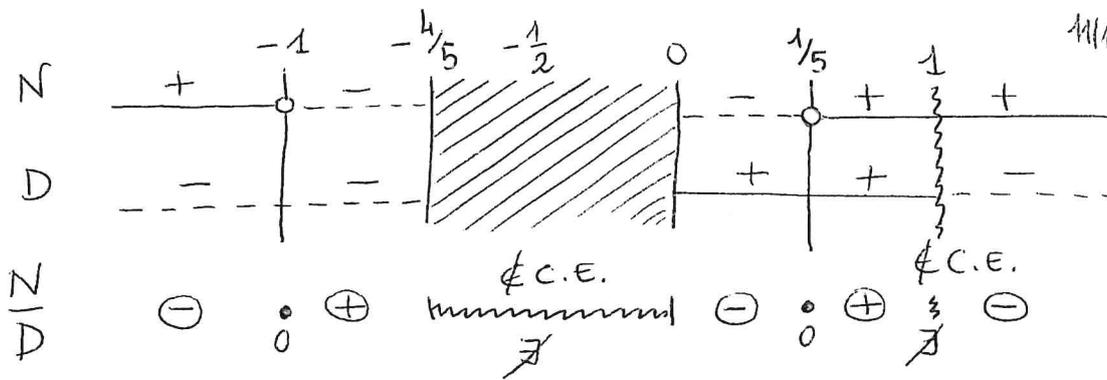
C.E. $x \in]-\infty, -\frac{4}{5}[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$

poiché $-\frac{4}{5} = -\frac{8}{10} < -\frac{1}{2} = -\frac{5}{10}$

$N = \log(5x^2 + 4x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \text{C.E.} \\ 5x^2 + 4x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \text{C.E.} \\ 5x^2 + 4x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x+1)(5x-1) > 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \text{C.E.} \\ x < -1 \cup x > \frac{1}{5} \end{cases}$

$D = -2x^2 + x + 1 > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 1$

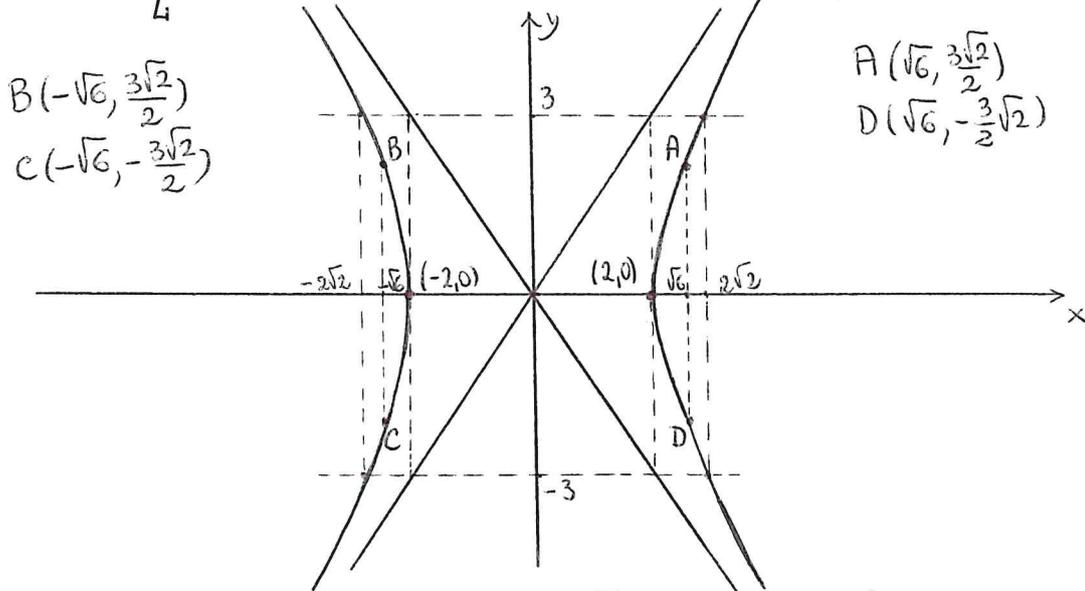


$\frac{N}{D} < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]0, \frac{1}{5}[\cup]1, +\infty[$ da cui

$S =]-\infty, -1[\cup]0, \frac{1}{5}[\cup]1, +\infty[$

ES. 4) $9x^2 - 4y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ che rappresenta un'IPERBOLE avente $C(0,0)$ RIFERITA agli asintoti ($a=2, b=3$, ASINTOTI $y = \pm \frac{b}{a}x \rightarrow y = \pm \frac{3}{2}x$) passante per $(\pm 2, 0)$ e $(\pm 2\sqrt{2}, 3)$.

$y = \pm 3 \Rightarrow \frac{x^2}{4} = 2 \quad x^2 = 8 \quad x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2} \approx 2,8$



(MAT) $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{21}{2} \\ 9x^2 - 4y^2 = 36 \end{cases}$ circ di $C(0,0)$ $R = \frac{\sqrt{3}\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \quad \begin{cases} x^2 = \frac{21}{2} - y^2 \\ 9(\frac{21}{2} - y^2) - 4y^2 = 36 \end{cases}$

$\begin{cases} \dots \\ \frac{189}{2} - 13y^2 = 36 \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ 13y^2 = \frac{117}{2} \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ y^2 = \frac{9}{2} \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = \frac{21}{2} - \frac{9}{2} = 6 \\ y = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x = \pm\sqrt{6} \approx \pm 2,45 \\ y = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx \pm 2,1 \end{cases}$ Intersezioni in $(\pm\sqrt{6}, \pm \frac{3\sqrt{2}}{2})$

es 0) i) $f(x) = -1 + \sqrt{x-4}$ $\text{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : x-4 \geq 0\} = [4, +\infty[$

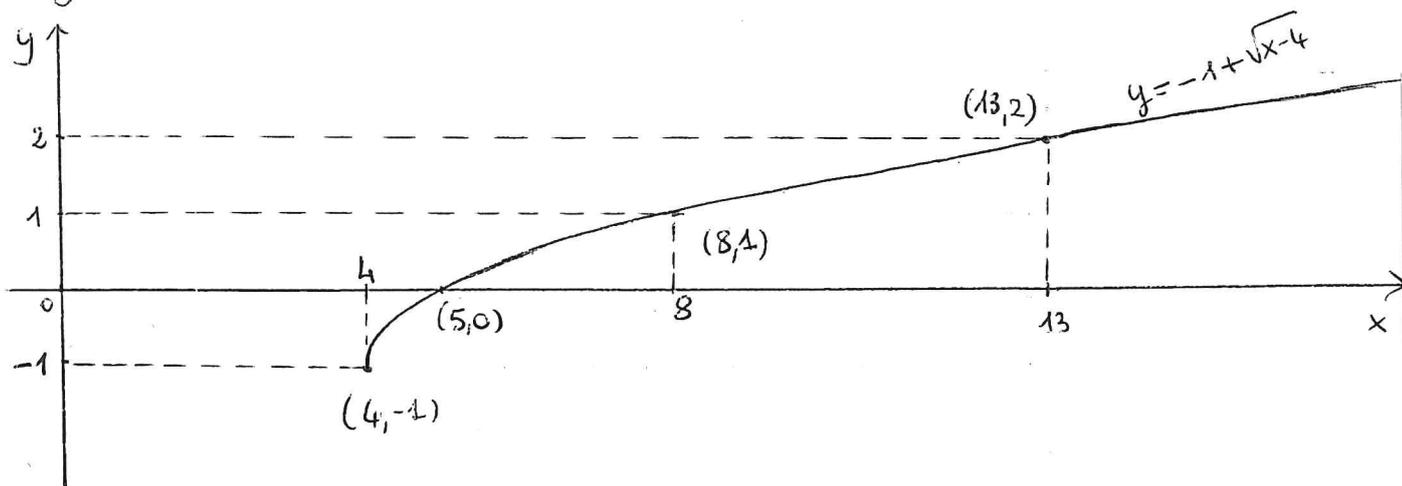
eq.^{ue} del grafico $y = -1 + \sqrt{x-4}$ si tratta del grafico della radice

$y = \sqrt{x}$ spostato a destra di 4 ed in basso di 1 - Passa per

$(4, -1) (5, 0) (8, 1) (13, 2)$

, nessun asintoto

$$\begin{cases} y=0 \\ y=-1+\sqrt{x-4} \end{cases} \begin{cases} -1+\sqrt{x-4}=0 \\ \dots \end{cases} \begin{cases} \sqrt{x-4}=1 \\ \dots \end{cases} \begin{cases} x-4 \geq 0 \\ 1 > 0 \\ x-4=1 \\ \dots \end{cases} \begin{cases} x=5 \text{ Acc.} \\ y=0 \end{cases}$$



$g(x) = \log(x+4)$

$\text{dom} g = \{x \in \mathbb{R} : x+4 > 0\} =]-4, +\infty[$

eq.^{ue} del grafico: $y = \log(x+4)$ si tratta del grafico del logaritmo

$y = \log x$ spostato a sinistra di 4. Passa per $(-4 + \frac{1}{e^2}, -2)$ $(-4 + \frac{1}{e}, -1)$

$(-3, 0) (-4+e, 1) (-4+e^2, 2)$
 $\approx -1,3 \quad \approx 3,4$

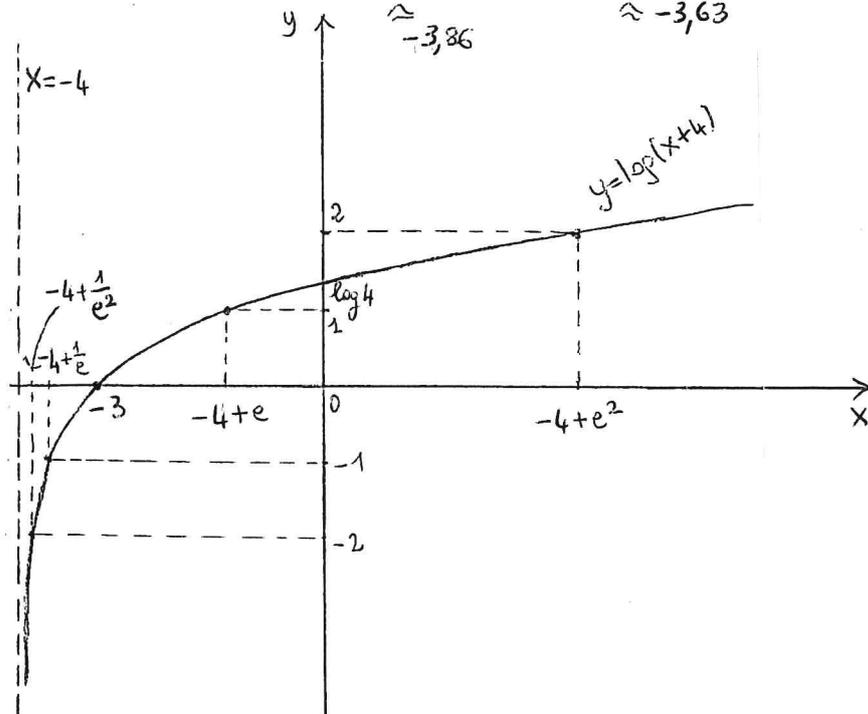
asintoto verticale $x = -4$

$\approx -3,86 \quad \approx -3,63$

$$\begin{cases} y = \log(x+4) \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} \log(x+4) = 0 \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+4 > 0 \\ x+4 = e^0 = 1 \\ \dots \end{cases} \begin{cases} x = -3 \text{ Acc} \\ y = 0 \end{cases}$$

Passa per $(0, \log 4)$
 $\approx 1,4$



es. 2) a) 1° tratto eq.^{ue} del grafico $y = -(-1 + \sqrt{x-4})$ si tratta del grafico

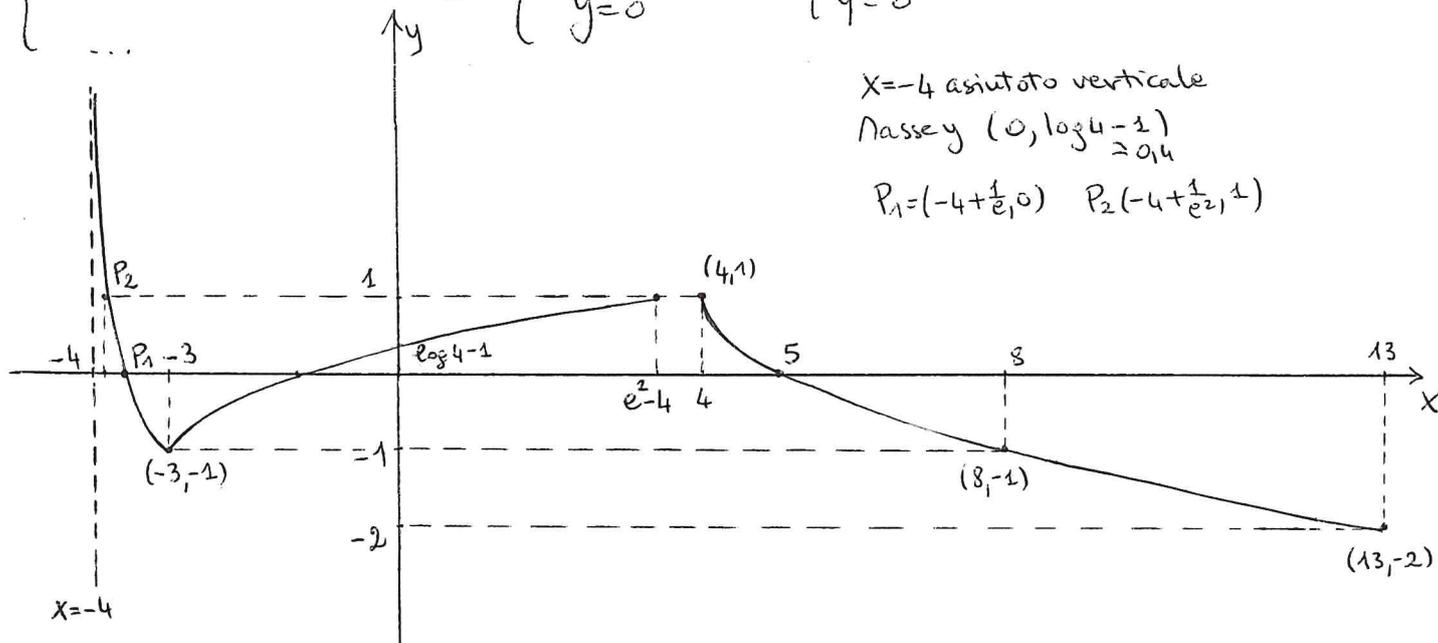
$y = -1 + \sqrt{x-4}$ della funzione f disegnata al punto 0i) simmetrizzato rispetto all'asse x : passa per i punti $(4, 1)$ $(5, 0)$ $(8, -1)$ $(13, -2)$.

2° tratto eq.^{ue} del grafico $y = |\log(x+4)| - 1$ si tratta del grafico $y = \log(x+4)$

della funzione g disegnata al punto 0i) di cui si considererà il VALORE ASSOLUTO (quindi il simmetrico rispetto all'asse x sottile $y < 0$, mentre le $y \geq 0$ rimangono inalterate) e che poi viene spostato verso il basso di 1. Passa per $(-4 + \frac{1}{e^2}, 1)$ $(-4 + \frac{1}{e}, 0)$ $(-3, -1)$ $(-4 + e, 0)$ $(-4 + e^2, 1)$.

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = |\log(x+4)| - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} |\log(x+4)| = 1 \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} \log(x+4) = 1 \\ \log(x+4) = -1 \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x > -4 \\ x+4 = e^0 \end{cases} \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x > -4 \\ x+4 = \frac{1}{e} \end{cases} \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} x = e - 4 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4 + \frac{1}{e} \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{entrambe accettabili}$$



$$f\left(\frac{1}{e^2} - 4\right) = \left|\log\left(-4 + \frac{1}{e^2} + 4\right)\right| - 1 = \left|\log\left(\frac{1}{e^2}\right)\right| - 1 = |-2| - 1 = 2 - 1 = 1$$

$-4 + \frac{1}{e^2} > -4$

$$f(8) = -(-1 + \sqrt{8-4}) = -(-1 + \sqrt{4}) = -(-1 + 2) = -(+1) = -1$$

$8 > 4$

11/10/19 - Mat/Fis - 11B

es 2) b) Il grafico della funzione g che ha eq.^{ue} $y = f(|x|)$

corrisponde a considerare

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \rightarrow y = f(x) \text{ se } x \geq 0 \\ f(-x) & x < 0 \rightarrow y = f(-x) \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

SIMMETRICO di f
rispetto all'asse y

$$\text{dom } g = \{x \in \mathbb{R} : |x| \in \text{dom } f\} = [-13, -4] \cup [4 - e^2, e^2 - 4] \cup [4, 13]$$

