SOL.^{ne} della PROVA di AUTOVALUTAZIONE su

DISEQUAZIONI, INSIEMI, LOGICA

ES. 1) $\begin{cases} \dfrac{\frac{5}{2}x-1}{x} \le \dfrac{8}{x+2} \\ 2x^3-4x-x^2+3<0 \end{cases}$

1ª diseq.^{ne} $\dfrac{5x^2-8x-4}{2x(x+2)} \le 0$ COND. di ESISTENZA $x \neq 0$ $x \neq -2$

DIS.^{ne} Fratta $N \geq 0$ $x \in]-\infty, -\frac{2}{5}] \cup [2, +\infty[$ $N=0$ $x=-\frac{2}{5}, 2$

$D>0$ $x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$

SOL.^{ni} $x \in]-2, -\frac{2}{5}] \cup]0, 2]$

2ª diseq.^{ne} $(x-1)^2(2x+3)<0$ DIS.^{ne} prodotto

$F_1 = (x-1)^2 \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $F_1 = 0$ $x=1$

$F_2 = (2x+3) \geq 0$ $x \geq -\frac{3}{2}$ $F_2 = 0$ $x = -\frac{3}{2}$

SOL.^{ni} $x \in]-\infty, -\frac{3}{2}[$

SOL.^{ni} del SISTEMA = 1ª DIS.^{ne} $\cap$ 2ª DIS.^{ne} : $x \in]-2, -\frac{3}{2}[$

ES2) A è definita da una DIS.^{ne} FRATTA COND di ESIST. $x \neq -1, x \neq 1$

$N_1 = (x-2) \geq 0$ $x \geq 2$ $N_1 = 0$ $x=2$

$N_2 = (x^2-3x+2) \geq 0$ $x \leq 1$ o $x \geq 2$ $N_2=0$ $x=1, x=2$

$D = x^4+x^3-x-1 = (x-1)(x+1)\underbrace{(x^2+x+1)}_{\Delta<0} > 0$ $x<-1$ o $x>1$

$A =]-1, 1[\cup]1, +\infty[$

B : 1ª diseq.^{ne} $\frac{1}{x^2} \geq 0$ $\forall x \neq 0$, 2ª dis.^{ne} $\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{10(x-6)} = \dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{10(x-6)}$

C.E. $x \neq 6$

$B =]-\infty, 0[\cup]0, 1] \cup [2, 3] \cup]6, +\infty[$

$A \cup B = \mathbb{R}$ $A \setminus B = \{0\} \cup]1, 2[\cup]3, 6]$ $\min A \setminus B = 0$

min $A \cup B$ $\nexists$ $\max A \setminus B = 6$

max $A \cup B$ $\nexists$

i) V perchè B contiene solo $x>6$ tra quelli con $x \geq 4$

ii) F $x=0$ ad es. $\in A$ ma $x^2 = 0 < 1$

iii) V qualunque siano A e B : dice che $A \cap B \subset A$ che è sempre vera

iv) F $x=0 \in A \setminus B$ anche se è vera $\forall x \in A \setminus B \; x \neq 0$

NEGAZIONI i) $\exists x : (x \geq 4 \text{ e } x \in B) \text{ e } x \leq 6$ F perchè significa $4 \leq x \leq 6$ e $x \in B$ B non contiene nessun numero di $[4,6]$

ii) $\exists x : x \in A \text{ e } x^2 \leq 1$ V come già detto ad es $x=0$, ma anche $x = \pm\frac{1}{2}$ ecc

iii) $\exists x : x \in A \cap B \text{ e } x \notin A$ F ovviamente, ogni elem $x \in A \cap B$ per def. di $\cap$ appartiene sia ad A sia a B

iv) $\exists x : x \in A \setminus B \text{ e } x \leq 0$ V $x=0 \in A \setminus B$

3) $A = \emptyset$ $B =]-\infty, 0[$ C: $t = x^2$ $x^4 - 5x^2 + 4 = t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4) =$
$= (x^2-1)(x^2-4)$

$x^4 - 5x^2 + 4 < 0$ $x \in]-2,-1[\cup]1,2[$

$C =]-2,-1[$

i) V $A = \emptyset$ quindi non c'è nulla da verificare

ii) V $x \in C \Rightarrow x < -1 < 0 \Rightarrow x \in B$

iii) F nessun elemento può $\in A = \emptyset$

iv) V $x \in C \Rightarrow -2 \leq x \leq -1 \Rightarrow 1 \leq x^2 \leq 4$

NEGAZIONI i) $\exists x : x \in A \text{ e } x \notin B$ F nessun $x \in A$

ii) $\exists x : x \in C \text{ e } x \notin B$ F tutti gli elementi di C appartengono anche a B

iii) $\exists x : x \in C \text{ e } x \notin A$ V ogni elem. di C non appartiene ad A

iv) $\exists x : x \in C \text{ e } x^2 > 4$ F come già visto prima $\forall x \in C \; 1 \leq x^2 \leq 4$.

4) i) P(x) viene $x^2 - 2x + 1 \leq 0$ verif. solo da $x = 1$

$P(x) =$ " $x^2 - 2x + 1 \leq 0$ " è vera solo per $x = 1$

ii) Q(x) è vera $\forall x \neq -9, 0, 2$ perchè $a^2 > 0 \;\; \forall a \neq 0 \Rightarrow x^3 - 18x + 7x^2 \neq 0$

$x(x^2 + 7x - 18) \neq 0$

$x(x-2)(x+9) \neq 0$

iii) a) afferma che ESISTE un $x > 0$ che verifica contemporaneamente sia P sia Q : V $\underline{x=1}$

b) Afferma che $\exists\, x<0$ che verifica contemporaneamente sia P sia Q : F perchè P è vera solo se $x=1$ che non è negativo

c) Afferma che $\forall x$ o è vera P o è vera Q F perchè per $x=-9,0,2$ sono false entrambe

d) Afferma che $\forall x$ o è falsa P o è vera Q V perchè P è falsa $\forall x \neq 1$

e in $x=1$ è vera Q.

NEGAZIONI

a) $\forall x$ $x \le 0$ o (NON P o NON Q) afferma che $\forall x$ o $x \le 0$ oppure P è falsa oppure Q è falsa F se $x=1$ nessuna delle 3 è verificata

b) $\forall x$ $x \geq 0$ o (NON P o NON Q) afferma che $\forall x$ o $x \geq 0$ oppure P è falsa oppure Q è falsa V se $x \geq 0$ è vera la 1ª, se $x<0$ allora P è falsa quindi è vera la 2ª

c) $\exists\, x$: NON P e NON Q afferma che esiste almeno un valore di x per cui P e Q sono entrambe false V ce ne sono 3 $x=-9,0,2$

d) $\exists\, x$: $P(x)$ e NON $Q(x)$ afferma che esiste almeno un valore di x per cui P è vera e Q è falsa F perchè P è vera solo per $x=1$ e per $x=1$ anche Q è vera.