COGNOME ______________________	NON SCRIVETE QUI
NOME ______________________	
MATRICOLA ⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌋	1 2 3 4 5 6 7

UNIVERSITÀ DI PARMA — C.L. in Matematica

ESAME DI ELEMENTI di MATEMATICA

A.A. 2019-2020 — PARMA, 14 NOVEMBRE 2019

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo **in stampatello** cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di quarantacinque minuti. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

Svolgete prima i calcoli in brutta, poi svolgete ordinatamente gli esercizi su questo foglio.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo. Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento**.

1) Sia $f : \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Negate la seguente proposizione:

$$\forall\, \mathbf{x} \in \operatorname{dom}\mathbf{f} \quad \exists\, \mathbf{a} \leq \mathbf{3} \;: \qquad \left[\, \mathbf{f(x)} > \mathbf{2} \;\; \underline{\mathbf{o}} \;\; (\mathbf{f(x)})^{\mathbf{2}} \leq \mathbf{a} \,\right]$$

Risposta: ...

2) Date la definizione di **inclusione tra due insiemi** e completate:

$A \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad \ldots$

non $(A \subseteq B) \quad \Longleftrightarrow \quad \ldots$

3) Completate correttamente la diseguaglianza:

$$a < b < 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{a^2} \quad \ldots \quad -\frac{1}{b^2}$$

riportando e giustificando tutti i passaggi.

Risposta: ...

4) Scrivete la definizione precisa di funzione debolmente crescente per una funzione $f : \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Risposta: ...

5) Dimostrate (con tutti i passaggi e le proprietà utilizzate) la formula:

$$A \setminus (B \cap C) \;=\; (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Dimostrazione: ...

6a) Date due funzioni $f : A \to B$, $g : B \to C$ dimostrate che se f e g sono iniettive allora la loro composizione è una funzione iniettiva.

Dimostrazione: ...

6b) Stabilite se è vera o falsa la seguente affermazione: se due funzioni $f : A \to B$, $g : A \to B$ sono iniettive allora la loro somma $f + g$ è una funzione iniettiva.

Risposta: ...

7) Considerate i due predicati:

$$\mathbf{P(x)} : x^3 + 2x^2 > 0 \qquad \mathbf{Q(x)} : |x| \leq \frac{3}{2} \ \underline{\text{e}} \ x^2 + x > 0 \ .$$

a) Dopo aver determinato quali valori di x rendono vera la proposizione $\mathbf{P(x)}$ e quali rendono vera $\mathbf{Q(x)}$, dite (motivando la risposta) se è VERA o FALSA la seguente proposizione

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R} \qquad \mathbf{Q(x)} \ \Rightarrow \ \mathbf{P(x)} \ .$$

Risposta: ...

b) Scrivete prima la negazione teorica della proposizione assegnata, poi la negazione esplicita, infine rispondete alle domande.

Negazione teorica: ...

Negazione esplicita: ...

Vera o falsa? ...

Perchè? ...

COGNOME ______	NON SCRIVETE QUI	
NOME ______	1 2 3 4 5 6 7	
MATRICOLA ⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊		

UNIVERSITÀ DI PARMA — C.L. in MATEMATICA

ESAME DI ELEMENTI DI MATEMATICA

A.A. 2019-2020 — PARMA, 14 NOVEMBRE 2019

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo **in stampatello** cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di quarantacinque minuti. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

Svolgete prima i calcoli in brutta, poi svolgete ordinatamente gli esercizi su questo foglio.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo. Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento.**

---

1) Sia $f : \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Negate la seguente proposizione:

$\forall\, \mathbf{x} \in \operatorname{dom}\mathbf{f} \quad \exists\, \mathbf{a} \leq 3 : \qquad [\, \mathbf{f(x)} > \mathbf{2} \ \underline{\mathbf{o}} \ (\mathbf{f(x)})^2 \leq \mathbf{a} \,]$

Risposta: ... $\exists x \in \operatorname{dom} f \ : \ \forall a \leq 3 \quad \text{NON} \left[f(x) > 2 \ \underline{o} \ (f(x))^2 \leq a \right]$

$\Longleftrightarrow \quad \exists x \in \operatorname{dom} f : \forall a \leq 3 \quad \left[f(x) \leq 2 \ \underline{E} \ (f(x))^2 > a \right]$

2) Date la definizione di **inclusione tra due insiemi** e completate:

$A \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \quad x \in A \Rightarrow x \in B$

non $(A \subseteq B) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x : \quad x \in A \ \underline{E} \ x \notin B$

3) Completate correttamente la diseguaglianza:

$$a < b < 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{a^2} \ \ > \ \ -\frac{1}{b^2}$$

riportando e giustificando tutti i passaggi.

Risposta: ... $a < b < 0 \underset{\text{passando al quadrato}}{\Longrightarrow} 0 < b^2 < a^2 \underset{\text{passando al reciproco}}{\Longleftrightarrow} 0 < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2}$

$\underset{\text{passando all'opposto}}{\Longleftrightarrow} \quad -\frac{1}{b^2} < -\frac{1}{a^2} < 0$

4) Scrivete la definizione precisa di funzione debolmente crescente per una funzione f : $\operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Risposta: ... $\forall x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

5) Dimostrate (con tutti i passaggi e le proprietà utilizzate) la formula:

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Dimostrazione: ..Per la def. di uguaglianza tra due insiemi dimostriamo che $\forall x \quad x \in A \setminus (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$:

$x \in A \setminus (B \cap C) \underset{\text{def differenza}}{\Leftrightarrow} x \in A$ E $x \notin B \cap C \underset{\text{def} \notin}{\Leftrightarrow} x \in A$ E NON $(x \in B \cap C)$

$\underset{\text{def} \cap}{\Leftrightarrow} x \in A$ E NON $(x \in B$ E $x \in C) \underset{\text{NEG E}}{\Leftrightarrow} x \in A$ E $(x \notin B$ O $x \notin C) \Leftrightarrow$

$\underset{\text{propr distrib di E risp a O}}{\Leftrightarrow} (x \in A$ E $x \notin B)$ O $(x \in A$ E $x \notin C) \underset{\text{def differenza}}{\Leftrightarrow} (x \in A \setminus B)$ O $(x \in A \setminus C) \underset{\text{def} \cup}{\Leftrightarrow}$ $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

6a) Date due funzioni $f : A \to B$, $g : B \to C$ dimostrate che se f e g sono iniettive allora la loro composizione è una funzione iniettiva.

Dimostrazione: ... IP $f: A \to B$ iniettiva $\forall a_1, a_2 \in A \quad f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

$g: B \to C$ iniettiva $\forall b_1, b_2 \in B \quad g(b_1) = g(b_2) \Rightarrow b_1 = b_2$

TESI $g \circ f: A \to C$ iniettiva $\forall a_1, a_2 \in A \quad (g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

Dim. Siano $a_1, a_2 \in A$: $\boxed{(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)} \underset{\text{def comp}}{\Leftrightarrow} g(f(a_1)) = g(f(a_2))$

$\Leftrightarrow$ chiamiamo $b_1 = f(a_1) \in B$, $b_2 = f(a_2) \in B$ $\quad g(b_1) = g(b_2) \underset{b_1, b_2 \in B \text{ g iniett per IPOTESI}}{\Rightarrow} b_1 = b_2 \underset{b_1 = f(a_1),\ b_2 = f(a_2)}{\Leftrightarrow} f(a_1) = f(a_2) \underset{\text{f iniett. per IPOTESI}}{\Rightarrow} \boxed{a_1 = a_2}$

6b) Stabilite se è vera o falsa la seguente affermazione: se due funzioni $f : A \to B$, $g : A \to B$ sono iniettive allora la loro somma $f + g$ è una funzione iniettiva.

Risposta: ..L'affermazione è <u>falsa</u> : basta un <u>controesempio</u>

prese $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = -x$ queste due funzioni sono iniettive (anzi biunivoche $f^{-1}(x) = \underset{f(x)}{x}$, $g^{-1}(x) = -x = g(x)$)

ma $(f+g): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione

che $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x - x = 0$ $\quad f+g \equiv 0$ che non è iniettiva:

infatti $f^{-1}(x) = \emptyset \ \forall x \neq 0$ e $f^{-1}(0) = \mathbb{R}$.

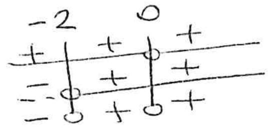
7) Considerate i due predicati:

$$\mathbf{P(x)} : x^3 + 2x^2 > 0 \qquad \mathbf{Q(x)} : |x| \le \frac{3}{2} \ \underline{\mathsf{E}} \ x^2 + x > 0 \ .$$

a) Dopo aver determinato quali valori di x rendono vera la proposizione $\mathbf{P(x)}$ e quali rendono vera $\mathbf{Q(x)}$, dite (motivando la risposta) se è VERA o FALSA la seguente proposizione

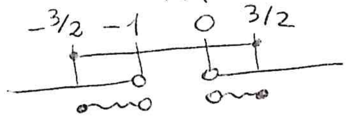
$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R} \qquad \mathbf{Q(x)} \ \Rightarrow \ \mathbf{P(x)} \ .$$

Risposta: ... $P(x) : x^2(x+2) > 0$ $\quad x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$ $\quad x+2 > 0 \quad x > -2$

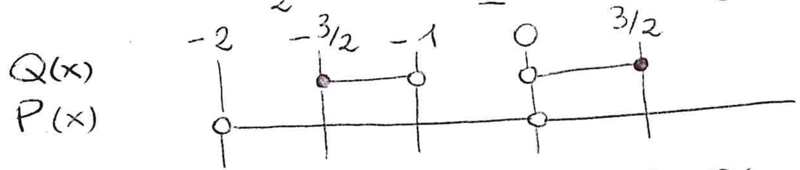


$P(x) : -2 < x < 0 \ \underline{o} \ x > 0$

$Q(x) : -\frac{3}{2} \le x \le \frac{3}{2} \ \underline{E} \ (x < -1 \ \underline{o} \ x > 0)$ $\quad x^2 + x = 0 \quad x(x+1) = 0$



$-\frac{3}{2} \le x < -1 \ \underline{o} \ 0 < x \le \frac{3}{2}$



$\forall x \ Q(x) \Rightarrow P(x)$ è VERA perchè ogni x che rende VERA Q(x) rende VERA anche Q(x) (non esiste x per cui Q(x) sia VERA e P(x) FALSA. Infatti detto $A = \{x : Q(x)\} = [-\frac{3}{2}, -1[\cup]0, \frac{3}{2}]$ e $B = \{x : P(x)\} =]-2, 0[\cup]0, +\infty[$ $\ [\forall x \ Q(x) \Rightarrow P(x)] \Leftrightarrow A \subseteq B$ che è <u>VERA</u>

b) Scrivete prima la negazione teorica della proposizione assegnata, poi la negazione esplicita, infine rispondete alle domande.

Negazione teorica: ... $\exists x \in \mathbb{R} : \ Q(x) \ \underline{E} \ \mathrm{NON}\, P(x))$

Negazione esplicita: .. $\exists x \in \mathbb{R} : \left[-\frac{3}{2} \le x < -1 \ \underline{o} \ 0 < x \le \frac{3}{2}\right] \underline{E} \left[x \le -2 \ \underline{o} \ x = 0\right]$

Vera o falsa? ... FALSA

Perchè? .. NON ESISTE nessun x che le verifichi entrambe: infatti i due insiemi sono DISGIUNTI