| | |
|---|---|
| COGNOME ________________ | NON SCRIVETE QUI |
| NOME ________________ | 1 2 3 4 5 6 7 |
| MATRICOLA ⌊ ⌊ ⌊ ⌊ ⌊ ⌊ ⌊ | |

# UNIVERSITÀ DI PARMA — C. L. in MATEMATICA

## ESAME DI ELEMENTI di MATEMATICA

## A.A. 2019-2020 — PARMA, 29 GENNAIO 2020

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo **in stampatello** cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di cinquanta minuti. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

Svolgete prima i calcoli in brutta, poi svolgete ordinatamente gli esercizi su questo foglio.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo. Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento.**

1) Negate la seguente proposizione:

$$\exists\ \mathbf{a} > \mathbf{2}\ :\quad \forall\ \mathbf{b} < \mathbf{1}\qquad [\ \mathbf{P(a,b)}\ \ \underline{\mathbf{e}}\ \ \mathbf{Q(a,b)}\ ]\ \Rightarrow\ \mathbf{R(a,b)}$$

Risposta: ... $\forall a > 2\ \exists b < 1\ \ [P(a,b)\ \underline{e}\ Q(a,b)]\ \underline{e}\ \text{NON}(R(a,b))$

2) Date la definizione di **uguaglianza tra due insiemi** e completate:

$A = B \iff$ ... $\forall x\quad x \in A \Leftrightarrow x \in B$

**non** $(A = B) \iff$ $\exists x :\ [x \in A\ \underline{e}\ x \notin B]\ \underline{o}\ [x \in B\ \underline{e}\ x \notin A]$

$[x \in A \Leftrightarrow x \in B] \Leftrightarrow [(x \in A \Rightarrow x \in B)\ \underline{e}\ (x \in B \Rightarrow x \in A)]$

3) Completate correttamente:

$$\frac{(-3\,x\,y^2\,z)^3}{3\,x^2\,y^6\,z^4} = \ldots -\frac{9x}{z}$$

riportando e giustificando tutti i passaggi con le proprietà utilizzate.

Passaggi: ... $\dfrac{(-3xy^2z)^3}{3x^2y^6z^4} = \dfrac{-3^3x^3y^6z^3}{3x^2y^6z^4} = -\dfrac{\cancel{27}^{\,9}\,x^{\cancel{3}}\,\cancel{y^6}\,\cancel{z^3}}{\cancel{3}x^{\cancel{2}}\cancel{y^6}z^{\cancel{4}}} = -\dfrac{9x}{z}$

$-$ perchè potenza dispari

$(a^n)^m = a^{n\cdot m}$

$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

4) Scrivete la definizione precisa di funzione iniettiva per una funzione $f : \mathrm{dom}\, f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e poi la negazione di tale definizione.

Risposta: ... Def. $f: \mathrm{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è INIETTIVA se $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom} f$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Negazione $\exists\, x_1, x_2 \in \mathrm{dom} f : \quad x_1 \neq x_2$ e $f(x_1) = f(x_2)$

Def oppure $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom} f$

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Neg è la stessa

5) Dimostrate (con tutti i passaggi e le proprietà utilizzate) la formula relativa al complementare dell'intersezione:

$(A \cap B)^c = .. A^c \cup B^c$

si veda es. 2)

**Dimostrazione:** ... $E = F \iff \forall x \quad x \in E \iff x \in F$

Tesi $\forall x \quad x \in (A \cap B)^c \iff x \in (A^c \cup B^c)$

dim. prendo $x \in (A \cap B)^c$ :

$x \in (A \cap B)^c \underset{\text{Def. complementare}}{\iff} x \notin (A \cap B) \underset{\text{Def} \notin}{\iff} \text{NON } (x \in A \cap B) \underset{\text{Def} \cap}{\iff} \text{NON } (x \in A \text{ e } x \in B)$

$\underset{\text{negare una e}}{\iff} \text{NON } (x \in A) \text{ o } \text{NON } (x \in B) \underset{\text{def} \notin}{\iff} x \notin A \text{ o } x \notin B \underset{\text{Def. Complem.}}{\iff} x \in A^c \text{ o } x \in B^c$

$\underset{\text{Def} \cup}{\iff} x \in (A^c \cup B^c)$

6) Date due funzioni $f : A \to B$, $g : B \to C$, dimostrate che se la loro composizione è una funzione suriettiva allora la funzione $g$ è suriettiva.

**Dimostrazione:** ...

IP $g \circ f : A \to C$ è SURIETTIVA cioè $\forall c \in C \ \exists\, a \in A : (g \circ f)(a) = c$

TESI $g : B \to C$ è SURIETTIVA cioè $\forall c \in C \ \exists\, b \in B : g(b) = c$.

Dim. Sia $c \in C$ per poter dimostrare la tesi: per IPOTESI dato

$c \in C \underset{\text{IP}}{\Rightarrow} \exists\, a \in A : (g \circ f)(a) = c \underset{\text{def. Composizione}}{\iff} \exists\, a \in A : g(f(a)) = c$

$\Rightarrow \exists\, b \in B : g(b) = c$ che è quello che dovevamo dimostrare.

$f(a) \in B$

chiamo $b = f(a)$

7) Considerate i due predicati:

$$\mathbf{P(x)} : \frac{x-1}{5} + \frac{x-4}{2} > x \qquad \mathbf{Q(x)} : \left[x^2 > 0 \ \underline{e} \ x^2 \le 49 \ \underline{e} \ x \le 0\right] .$$

a) Dopo aver determinato quali valori di $x$ rendono vera la proposizione $\mathbf{P(x)}$ e quali rendono vera $\mathbf{Q(x)}$ , dite (motivando la risposta) se è VERA o FALSA la seguente proposizione

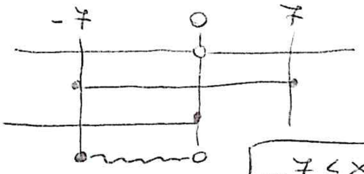
$$\exists \mathbf{x} \in \mathbf{R} \qquad \mathbf{P(x)} \ \underline{e} \ \mathbf{Q(x)} \ .$$

Risposta: ... $\boxed{P(x)}$ molt. per $10>0$ $\quad 2(x-1)+5(x-4)>10x \iff 2x-2+5x-20>10x$

$\iff 3x<-22 \iff \boxed{x<-\frac{22}{3}}$

$\boxed{Q(x)}$ $\quad x^2>0 \ \forall x\neq 0$

$x^2\le 49 \quad -7\le x\le 7$



$x^2>0$

$x^2\le 49$

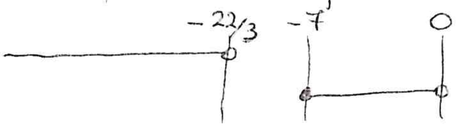
$x\le 0$

devo considerare $\underline{E}$ quindi $\cap$ le sol.^ni $\quad \boxed{-7\le x<0}$

Poichè $-\frac{22}{3}<-\frac{21}{3}=-7$ la proposizione è FALSA in quanto non esiste nessun $x$ che renda vere contemporaneamente sia $P(x)$ sia $Q(x)$:

P(x)

Q(x)



Detti $A=\{x: P(x)\}$ e $B=\{x: Q(x)\}$ risulta

$A\cap B=\emptyset$

b) Scrivete prima la negazione teorica della proposizione assegnata, poi la negazione esplicita, infine rispondete alle domande.

Negazione teorica: ... $\forall x \quad$ NON $P(x)$ $\underline{o}$ NON $Q(x)$

$-7\le x<0$ significa $x\ge -7$ $\underline{E}$ $x>0$

Negazione esplicita: .. $\forall x \quad x\ge -\frac{22}{3}$ $\underline{o}$ $(x<-7 \ \underline{o} \ x\ge 0)$

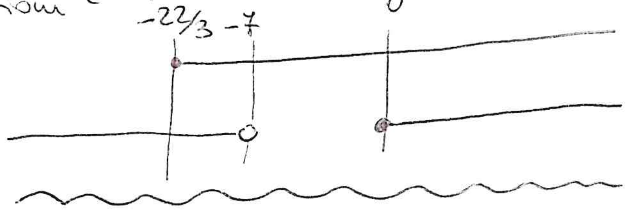
Vera o falsa? ... VERA

Perchè? ... Ogni numero reale verifica almeno una delle due affermazioni (infatti i numeri $\ge -\frac{22}{3}$ verificano $P(x)$ mentre i n.^i $<-\frac{22}{3}$ essendo $<-7$ verificano $Q(x)$ (i n.^i $\ge 0$ verificano entrambe)

NON P(x)

NON Q(x)

(NON P $\underline{o}$ NON Q)



Detti $E=\{x: \text{NON}P\}$ ed $F=\{x: \text{NON}Q\}$ si ha $E\cup F=\mathbb{R}$.