COGNOME ______	NON SCRIVETE QUI	
NOME ______		
MATRICOLA ⌊ ⌊ ⌊ ⌊ ⌊ ⌊ ⌋	1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6	
CORSO SEGUITO Mat Fis		

UNIVERSITÀ DI PARMA — C.L. in MATEMATICA e in FISICA

ESAME DI ELEMENTI DI MATEMATICA

A.A. 2017-2018 — PARMA, 15 DICEMBRE 2017

ElMat - 15/12/17 -1-

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo **in stampatello** cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

Svolgete prima i calcoli in brutta, poi svolgete ordinatamente gli esercizi su un altro foglio protocollo a quadretti, infine **copiate le sole risposte** su questo foglio.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo. Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento** (o traccia dello svolgimento).

1) Considerate l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 + 4x} \geq \frac{5}{3} x\}$. Allora:

$A = \ldots \;]-\infty, -4] \cup [0, \frac{9}{4}]$

poiché $\frac{9}{4} < \frac{16}{7}$ $(63 < 64)$

$A \setminus \left( ]-\infty, -5[\cup [\frac{16}{7}, +\infty[\right) = \ldots \; [-5, -4] \cup [0, \frac{9}{4}]$

Svolgimento a pag. 4

2a) Determinate tutte le soluzioni $x \in [0, 2\pi]$ dell'equazione:

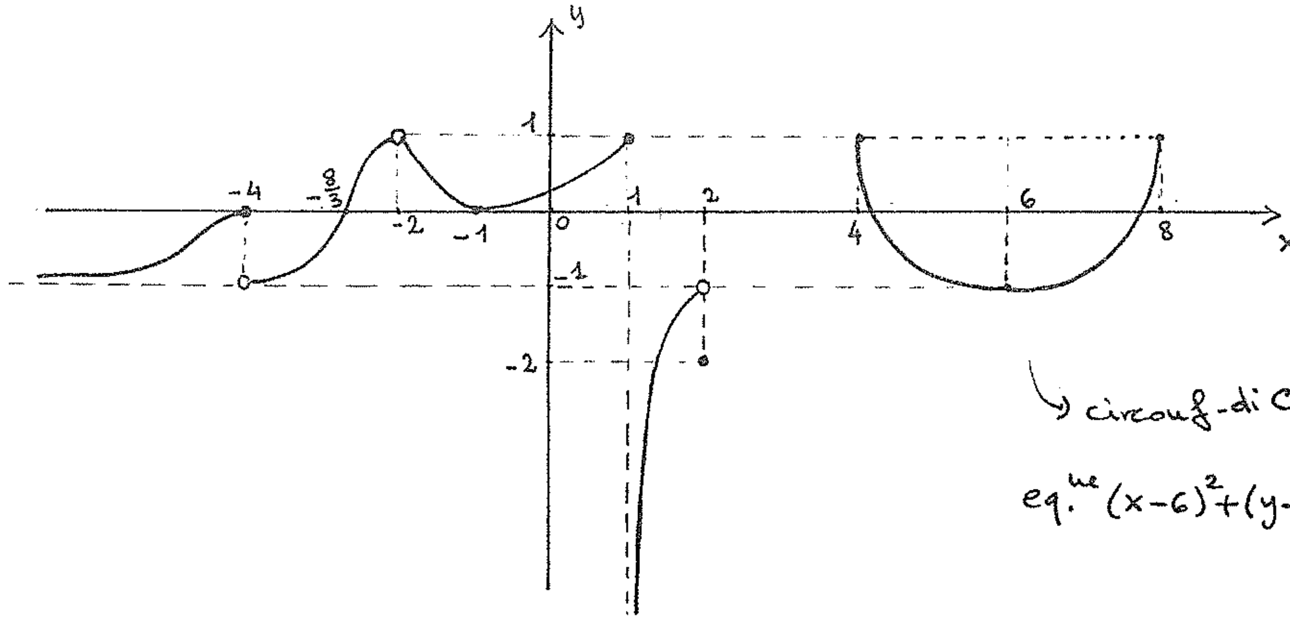
$2 \operatorname{sen}^3 x + 3 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 0 \iff \ldots \; x = 0$ o $x = \pi$ o $x = \frac{7}{6}\pi$ o $x = \frac{3}{2}\pi$ o $x = \frac{11}{6}\pi$ o $x = 2\pi$

2b) $\left(\frac{2}{3} \operatorname{sen}(-\frac{5}{2}\pi)\right)^3 \cdot \cos(\frac{7}{6}\pi) \cdot \left|\operatorname{sen}(\frac{4}{3}\pi) \cdot \log_{10}(\frac{1}{100})\right| \cdot \tan(\frac{3}{4}\pi) = \ldots -\frac{4}{9}$

2c) Completate: $\left|2x^2 + 3x - 1\right| \leq -x^2 + 5 \iff \ldots \; x \in [-2, 1]$

Svolgimento a pag. 4-5

3) Considerate la funzione f che ha il seguente grafico:



circonf. di $C(6,1)$ $R=2$
eq.ne $(x-6)^2+(y-1)^2=4$

Nota: Il tratto per $x \in [4,8]$ è il grafico di una semicirconferenza.

dom f = $]-\infty,-2[\cup]-2,2]\cup[4,8]$ Imm f = $]-\infty,1]$

max f = 1 (punti di max: $x=1$ $x=4$ $x=8$)

min f = $\nexists$ (punti di min: —)

punti di massimo locale: $x=-4$, $x=1$, $x=4$, $x=8$ punti di minimo locale: $x=-1$ $x=2$ $x=6$

$f(-4)$ = 0 $f(-2)$ = $\nexists$ $f(5)$ = $1-\sqrt{3}$ calcoli a pag. 4 $f^{-1}(0) = \{x=-4,\ x=-8/3,\ x=-1,\ x=6-\sqrt{3},\ x=6+\sqrt{3}\}$

Il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = -\frac{1}{2}$ è: 4

Definizione precisa di funzione **iniettiva**: ce ne sono 3 (si vedano gli appunti delle lezioni)

Dite se è VERO o FALSO (motivando in MODO PRECISO la risposta) che

F a) f è iniettiva su $[1, 2]$ $y=-2$ ammette 2 controimmagini ($x_1=2$, $x_2\simeq 1{,}4$)

V b) f è iniettiva su $]-\infty, -4]$. 1ª possibilità: ogni retta orizzontale $y=k$ interseca il grafico al massimo una volta ($k\leq-1$ o $k>0$ nessuna, $-1<k\leq 0$ 1 volta)

2ª possibilità: f è crescente (strettamente) su $]-\infty,-4]$ e quindi INIETTIVA

4a) Se $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{(x-4)^2} - \dfrac{1}{x}} - \log(3x + 1)$ allora:

dom $f = \ldots$ $]-\frac{1}{3}, 0[\cup [\frac{8}{5}, 4[\cup]4, +\infty[$ Svolgim. a pag. 5

4b) Considerate le proposizioni:

$\mathbf{P(x)} = \log(2x+1) \leq 2 \qquad \mathbf{Q(x)} = x^2 > 0\,.$ Svolgim. a pag. 6

Dite (motivando la risposta) se è VERA o FALSA la seguente proposizione

$\forall \mathbf{x} \qquad (\mathbf{P(x)} \quad \mathbf{o} \quad \mathbf{Q(x)})$

Negate la proposizione assegnata e stabilite se la negazione ottenuta è una proposizione VERA o FALSA (motivando la risposta).

5a) Ordinate i numeri reali $-1\,,\ 0\,,\ 1-\sqrt{e}\,,\ -\dfrac{1}{2}\,.$ Svolgim. a pag. 6

5b) Disegnate con precisione sul foglio a quadretti il grafico della seguente funzione, specificando tutti i passaggi utilizzati per la costruzione di ogni tratto:

Svolgim. a pag. 7 - 8

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} & \text{se } x \leq -\dfrac{1}{2} \\ 1 - e^{|x|} & \text{se } -\dfrac{1}{2} < x \leq 1 \\ \left|-2 + \sqrt{x-3}\right| & \text{se } x \geq 3. \end{cases}$$

dom $f = \ldots$ $]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$, Imm $f = \ldots$ $[1-e, +\infty[$

$f(-\frac{1}{2}) = \ldots$ $-3/2$ $\qquad f^{-1}(0) = \ldots$ $\{-2, 0, 7\}$

Le soluzioni dell'equazione $f(x) = -1$ sono $\ldots$ $x = -\frac{2}{3}$, $x = +\log 2$

Svolgimento a pag. 8

6) Determinate l'equazione della parabola che passa per il punto $(-8\,, 3)$, avente il vertice appartenente alla retta $x = -6$ e ordinata del vertice pari a 4.

Disegnate con precisione la parabola trovata. $y = -\frac{1}{4}(x+6)^2 + 4$

ELMat-15/12/17-4

es.1)

$$x(x+4)\geq 0 \rightarrow x_1=0,\ x_2=-4$$

$$\sqrt{x^2+4x} \geq \frac{5}{3}x \iff \begin{cases} x^2+4x\geq 0 \\ \frac{5}{3}x<0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2+4x\geq 0 \\ \frac{5}{3}x\geq 0 \\ x^2+4x \geq \left(\frac{5}{3}x\right)^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x\leq -4 \ \text{o} \ x\geq 0 \\ x<0 \end{cases} \cup \begin{cases} x\leq -4 \ \text{o} \ x\geq 0 \\ x\geq 0 \\ x^2+4x \geq \frac{25}{9}x^2 \end{cases}$$

$$\iff x\in\,]-\infty,-4] \ \cup \begin{cases} x\geq 0 \\ \frac{16}{9}x^2-4x\leq 0 \end{cases}$$

$$4x\cdot\left(\frac{4}{9}x-1\right)\leq 0 \quad \begin{matrix} \rightarrow x_1=0 \\ \rightarrow x_2=9/4 \end{matrix}$$

$$\iff x\in\,]-\infty,-4] \cup \begin{cases} x\geq 0 \\ 0\leq x\leq \frac{9}{4} \end{cases} \iff x\in\,]-\infty,-4]\cup\left[0,\frac{9}{4}\right]$$

$$A=\,]-\infty,-4]\cup\left[0,\frac{9}{4}\right]$$

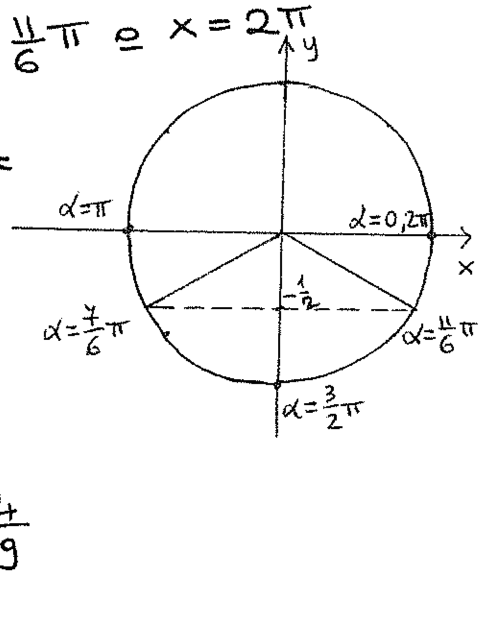
es 2a) $\operatorname{sen}x\cdot(2\operatorname{sen}^2x+3\operatorname{sen}x+1)=0 \iff$

$$\iff \operatorname{sen}x=0 \quad \text{o} \quad 2\operatorname{sen}^2x+3\operatorname{sen}x+1=0$$

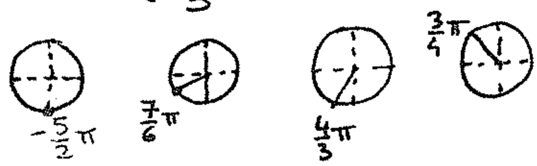
$$t=\operatorname{sen}x \quad 2t^2+3t+1=0 \quad t_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{4} \quad t_1=-1 \quad t_2=-\frac{1}{2}$$

$$\iff \operatorname{sen}x=0 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen}x=-1 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen}x=-\frac{1}{2}$$

$$\iff x=0 \ \text{o} \ x=\pi \ \text{o} \ x=\frac{7}{6}\pi \ \text{o} \ x=\frac{3}{2}\pi \ \text{o} \ x=\frac{11}{6}\pi \ \text{o} \ x=2\pi$$



es. 2b) $\left(\frac{2}{3}(-1)\right)^3\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\log_{10}10^{-2}\right|\cdot(-1)=$



$$=\left(-\frac{8}{27}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-2)\right|\cdot(-1)=$$

$$=-\frac{4}{27}\sqrt{3}\cdot|\sqrt{3}|=-\frac{4}{9}$$

es.2c) $|2x^2+3x-1| \leq -x^2+5 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x^2+3x-1 \leq -x^2+5 \\ 2x^2+3x-1 \geq x^2-5 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3x^2+3x-6 \leq 0 & x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{81}}{6} = \dfrac{-3 \pm 9}{6} \begin{matrix} \nearrow -2 = x_1 \\ \searrow 1 = x_2 \end{matrix} \\ x^2+3x+4 \geq 0 & \Delta = 9-16 < 0 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \in [-2, 1] \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$ poichè il trinomio ha sempre il segno del 1° coeff.

SOL.^{ni} $x \in [-2, 1]$

es 3) $f(5)$: $x=5$ $y \leq 1$ cerco y $(5-6)^2+(y-1)^2=4$

$(y-1)^2=3$ $y-1=\pm\sqrt{3}$ $y=1\pm\sqrt{3}$ essendo $y<1$

$\to y = 1-\sqrt{3}$

$f^{-1}(0)$ con la circonf. $y=0$ cerco x $(x-6)^2+(0-1)^2=4$

$(x-6)^2=3$ $x=6\pm\sqrt{3}$

es.4a) $\mathrm{dom} f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{x+2}{(x-4)^2} - \dfrac{1}{x} \geq 0,\ 3x+1>0,\ x \neq 0,\ (x-4)^2 \neq 0 \right\}$

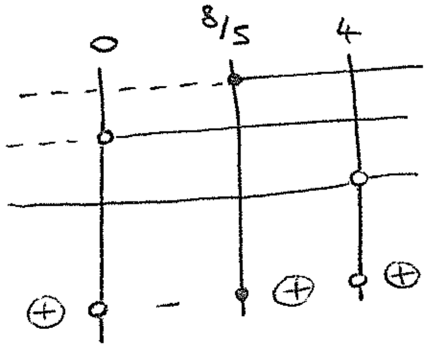
$\begin{cases} x \neq 0 & \text{I} \\ x \neq 4 & \text{II} \\ \dfrac{x(x+2)-(x-4)^2}{x(x-4)^2} \geq 0 & \text{III} \\ x > -\dfrac{1}{3} & \text{IV} \end{cases}$

III $\dfrac{10x-16}{x(x-4)^2} \geq 0$

$N \geq 0$ $x \geq \dfrac{8}{5}$

$D_1 = x > 0$ $x > 0$

$D_2 = (x-4)^2 > 0$ $x \neq 4$



$\dfrac{N}{D_1 \cdot D_2} \geq 0$

$\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 4 \\ x \in]-\infty, 0[\cup [\frac{8}{5}, 4[\cup]4, +\infty[\\ x \in]-\frac{1}{3}, +\infty[\end{cases}$

$\boxed{\mathrm{dom} f =]-\tfrac{1}{3}, 0[\cup [\tfrac{8}{5}, 4[\cup]4, +\infty[}$

es. 4b) $\quad P(x) = "x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(e^2-1)\right]"$

$$\log(2x+1) \le 2 \iff \begin{cases} 2x+1>0 \\ \log(2x+1) \le \log e^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ 2x+1 \le e^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ 2x \le e^2 - 1 \end{cases} \iff x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(e^2-1)\right]$$

perchè su $]0,+\infty[$ log è una FUNZIONE CRESCENTE

$Q(x) = "x \neq 0"$ $\quad$ ($x^2>0$ è vera $\forall x$ escluso $x=0$)

$\forall x \quad (P(x) \ \underline{o}\ Q(x))$ è VERA in quanto basta che sia vera $P(x)$ oppure che sia vera $Q(x)$:

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} \text{se } x \neq 0 \Rightarrow \text{è VERA } Q(x) \\ \text{se } x=0 \Rightarrow \text{è VERA } P(x) \quad : x=0 \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(e^2-1)\right] \end{cases}$

e infatti $\log(1) \le 2 \iff 0 \le 2$ Vera $\quad$ (*)

NEGAZIONE: $\exists x : \quad$ NON $P(x)$ $\underline{e}$ NON $Q(x)$

$$\exists x : \quad \left(x \le -\tfrac{1}{2} \ \underline{o}\ x > \tfrac{1}{2}(e^2-1)\right) \ \underline{e}\ x^2 \le 0$$

che è chiaramente <u>falsa</u> perchè solo $x=0$ verifica la 2^a ($x^2 \le 0$), ma non verifica la 1^a condizione e con $\underline{e}$ devono essere verificate entrambe.

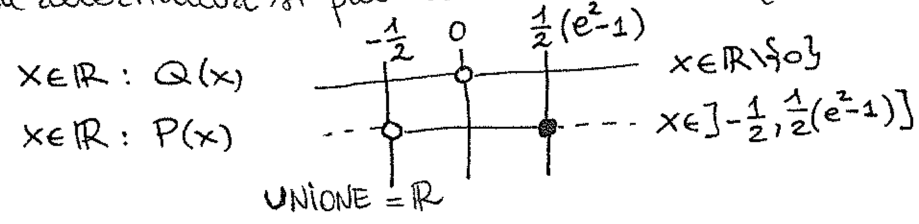
es. 5a) $-1 > 1-\sqrt{e} \iff \sqrt{e} > 2 \iff e > 4$ Falso $\Rightarrow 1-\sqrt{e} > -1$

$1-\sqrt{e} > -\frac{1}{2} \iff \sqrt{e} < \frac{3}{2} \iff e < \frac{9}{4} = 2{,}25$ Falso $\Rightarrow 1-\sqrt{e} < -\frac{1}{2}$

$$\boxed{-1 < 1-\sqrt{e} < -\tfrac{1}{2} < 0}$$

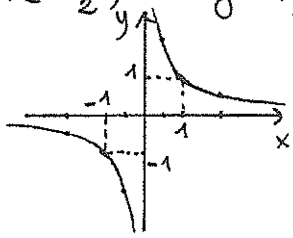
(*) in alternativa si può dimostrare che $\{x \in \mathbb{R} : P(x) \ \underline{o}\ Q(x)\} = \mathbb{R}$

$\uparrow = \{x \in \mathbb{R} : P(x)\} \cup \{x \in \mathbb{R} : Q(x)\}$



5b) $\text{dom} f =]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$

<u>1° tratto</u>: dom $x \neq 0$ (OK $x \leq -\frac{1}{2}$) il grafico è l'iperbole equilatera $y = \frac{1}{x}$ (riferita agli assi

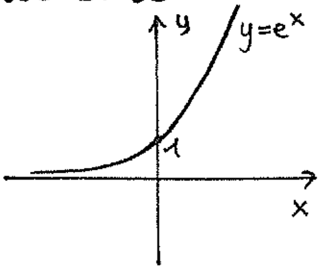


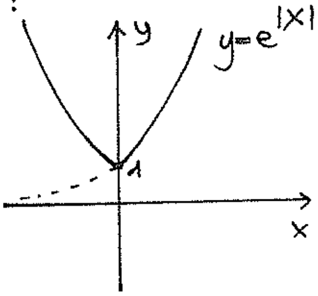
per $(-2, -\frac{1}{2}), (-1, -1), (-\frac{1}{2}, -2)$
$(\frac{1}{2}, 2), (1, 1), (2, \frac{1}{2})$)

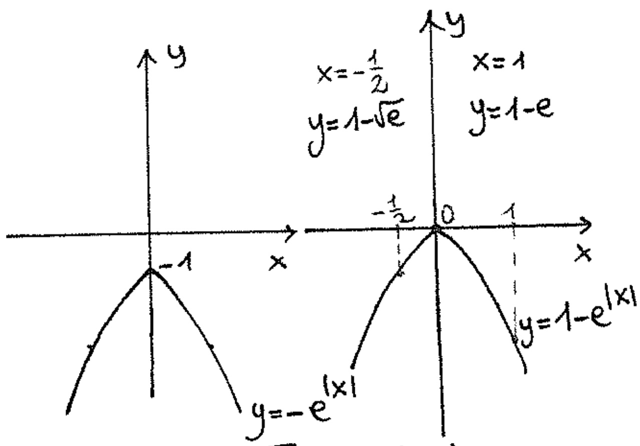
spostata verso l'alto di $\frac{1}{2}$ -

$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$ passa per $(-2, 0)$ $(-1, -\frac{1}{2})$ $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$, asintoti $x = 0$ e $y = \frac{1}{2}$

<u>2° tratto</u>: dom $\mathbb{R}$ (OK $-\frac{1}{2} < x \leq 1$) il grafico è $y = 1 - e^{|x|}$ - Partendo da $y = e^x$ si trascura la parte per $x < 0$ e si simmetrizza rispetto all'asse y, poi si considera il simmetrico rispetto all'asse x e infine si alza di 1 :

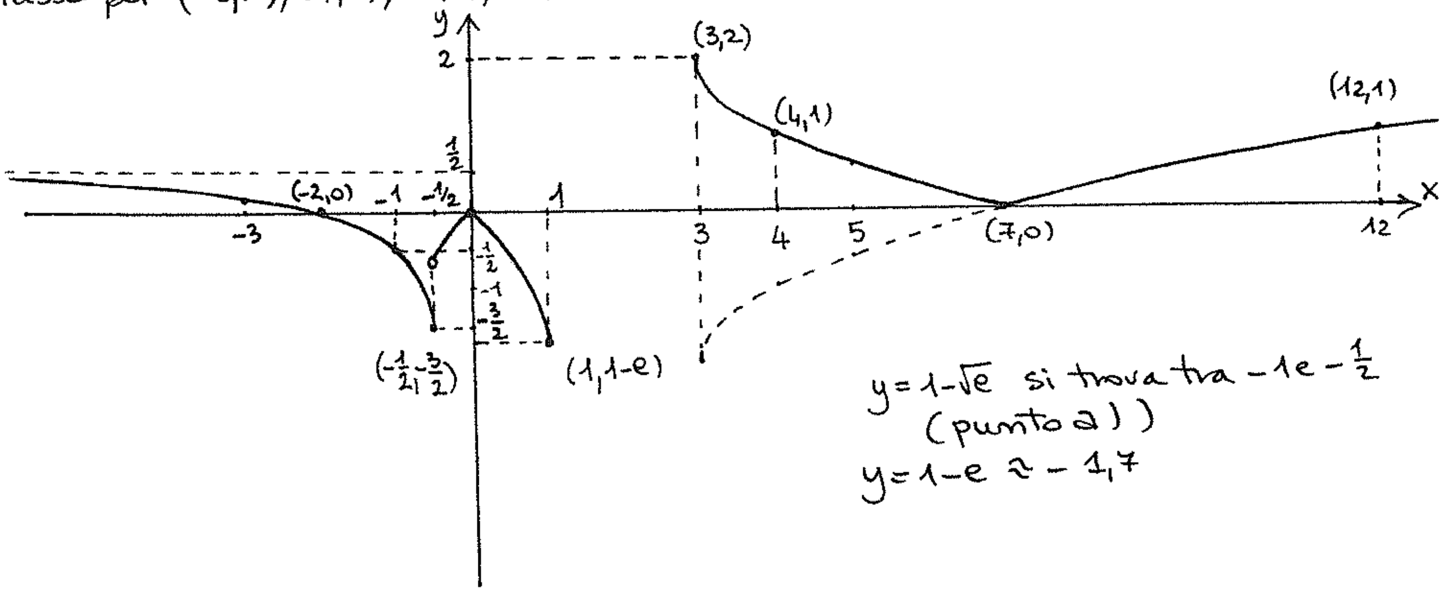






<u>3° tratto</u>: dom $x \geq 3$ (OK $x \geq 3$) il grafico è

$y = |-2 + \sqrt{x-3}|$: si tratta del grafico della radice $y = \sqrt{x}$ spostata a destra di 3 e in basso di 2, infine per effetto del $|\cdot|$ la parte con $y < 0$ si ribalta rispetto all'asse x.
Passa per $(-3, 2), (4, 1), (7, 0), (12, 1)$.



$y = 1 - \sqrt{e}$ si trova tra -1 e $-\frac{1}{2}$
(punto a))
$y = 1 - e \simeq -1{,}7$

L'eq.^{ne} $f(x)=-1$ ha due soluzioni: una nel 1° tratto con $x<-\frac{1}{2}$ e una nel 2° tratto con $0<x<1$.

<u>1° tratto</u> $\underset{x\neq 0}{f(x)=-1} \iff \frac{1}{x}+\frac{1}{2}=-1 \iff \frac{1}{x}=-\frac{3}{2} \iff \boxed{x=-\frac{2}{3}}$

<u>2° tratto</u> $f(x)=-1 \iff 1-e^{|x|}=-1 \iff e^{|x|}=2 \iff$

$e^{|x|}=e^{\log 2} \underset{e^x \text{ biunivoca}}{\iff} |x|=\log 2 \iff x=\pm\log 2 \Rightarrow \boxed{x=\log 2}$

($-\log 2$ non è accettabile $-\log 2<-\frac{1}{2}$: infatti $\log 2>\frac{1}{2}$
$2\log 2>1$ $\log 4>1$ vera perchè $4>e$).

es.6) eq.^{ne} $y=a(x-x_v)^2+y_v$ con $V(x_v,y_v)=(-6,4)$

$y=a(x+6)^2+4$

Imponendo il passaggio per $(-8,3)$ si determina a:

$3=a(-2)^2+4$ $4a=-1$ $a=-\frac{1}{4}$

eq.^{ne} $y=-\frac{1}{4}(x+6)^2+4$

$\cap$ asse x $\frac{1}{4}(x+6)^2=4$

$(x+6)^2=16$

$x+6=\pm 4$ $x=-6\pm 4$

$x=-10$ $x=-2$

$\cap$ asse y $y=-\frac{1}{4}x^2-3x-5$

$(0,-5)$