COGNOME		NON SCRIVETE QUI
NOME		
MATRICOLA		1 2 3 4 5 6
CORSO SEGUITO	Mat Fis	

UNIVERSITÀ DI PARMA — C.L. in Matematica e in Fisica

ESAME DI ELEMENTI DI MATEMATICA

A.A. 2017-2018 — PARMA, 30 GENNAIO 2018

El Mat - 30/1/18 - 1-

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo **in stampatello** cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

Svolgete prima i calcoli in brutta, poi svolgete ordinatamente gli esercizi su un altro foglio protocollo a quadretti, infine **copiate le sole risposte** su questo foglio.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo. Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare la risposta**.

1) Sia A l'insieme delle soluzioni del sistema

Svolgim. a pag. 4

$$\begin{cases} x^2\left(6x^2-6-5x\right)\left(5x+3\right)<0 \\ \dfrac{1-x}{3+x}\geq 0 \end{cases}$$

Allora: $A = \ldots\ \left]-3,-\frac{2}{3}\right[\cup \left]-\frac{3}{5},0\right[\cup \left]0,1\right]$

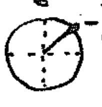
$A\setminus\left]-\frac{4}{7},+\infty\right[= \ldots \left]-3,-\frac{2}{3}\right[\cup \left]-\frac{3}{5},-\frac{4}{7}\right]$

Svolgim. a pag. 5

2a) Determinate tutte le soluzioni $x\in[0,2\pi]$:

$2\operatorname{sen}^2 x - \cos x - 2 = 0 \iff \ldots x=\frac{\pi}{2}$ o $x=\frac{3}{2}\pi$ o $x=\frac{2}{3}\pi$ o $x=\frac{4}{3}\pi$

$2\cos x > -\sqrt{3} \iff \ldots x\in\left[0,\frac{5}{6}\pi\right[\cup\left]\frac{7}{6}\pi,2\pi\right]$

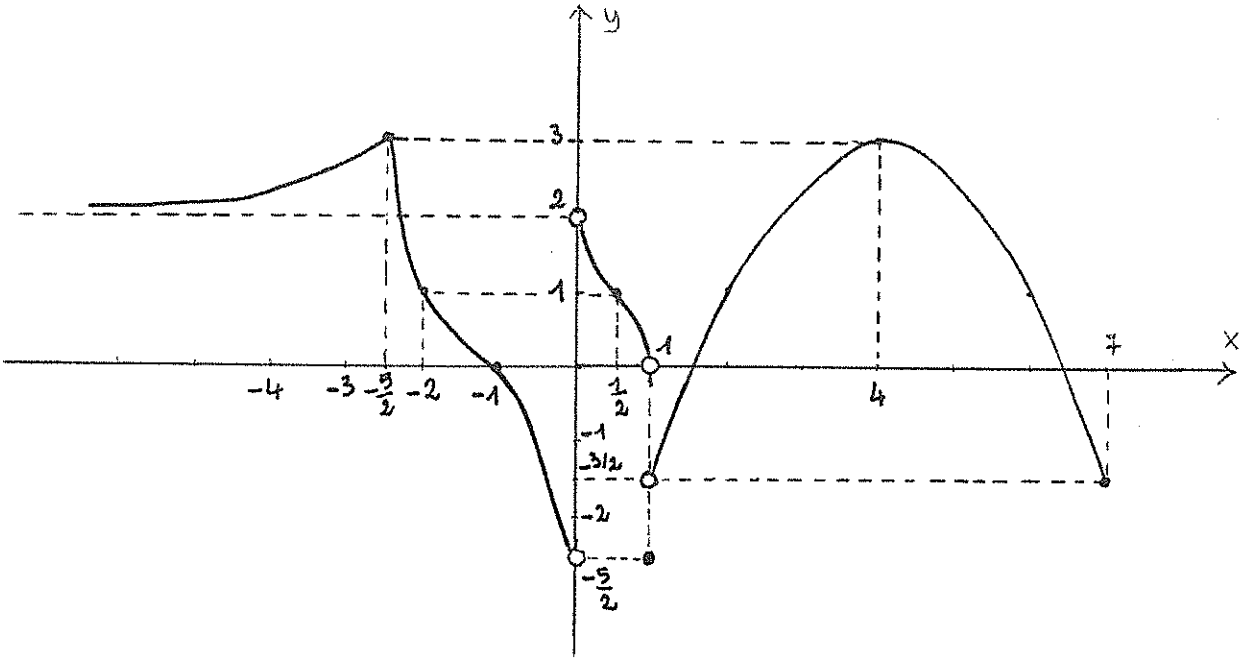
2b) Completate: $\cos(-\frac{7}{4}\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 

$\tan(\frac{2}{3}\pi) = -\sqrt{3}$ 

(è richiesto il DISEGNO dell'angolo sul cerchio trigonometrico)

2c) Completate: $\sqrt{25-x^2}\geq -3 \iff \ldots x\in[-5,5]$

3) Considerate la funzione f che ha il seguente grafico:



Nota: Il tratto per $x > 1$ è il grafico di una parabola.

dom f = $]-\infty, 0[\cup]0, 7]$, Imm f = $[-\frac{5}{2}, 3]$

max f = 3 (punti di max: $x=-\frac{5}{2}$, $x=4$)

min f = $-\frac{5}{2}$ (punti di min: $x=1$)

(*) utilizzando l'eq.ne della PARABOLA: calcoli e eq.ne a pag. 5

punti di massimo locale: $x=-\frac{5}{2}$ $x=4$ punti di minimo locale: $x=1$ $x=7$

$f(-1) =$ 0 $f(0) =$ $\nexists$ $f(1) =$ $-\frac{5}{2}$ $f^{-1}(1) = \{-2, \frac{1}{2}, 2, 6\}$

$x=2$ e $x=6$ calcolate (*)

Studiate il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$ per $k \geq 2$:
$$\begin{cases} k=2 & 3 \text{ sol.ni} \\ 2<k<3 & 4 \text{ sol.ni} \\ k=3 & 2 \text{ sol.ni} \\ k>3 & 0 \text{ sol.ni} \end{cases}$$

$\forall x_1, x_2 \in \text{dom} f \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Definizione precisa di funzione **strettamente decrescente**:
(Si vedano le lezioni del corso)

Dite se è VERO o FALSO (motivando IN MODO PRECISO la risposta) che

a) f è strettamente decrescente su $[-\frac{5}{2}, 0[\cup]0, 1[$ FALSO: $x_1=-1 < x_2=\frac{1}{2}$ ma $f(x_1)=f(-1)=0 < f(x_2)=1$

b) f è strettamente decrescente su $]0, 1]$. VERO: f diminuisce su $]0,1[$ e $f(1)=-5/2$ è minore di tutti gli altri valori.

4a) Se $f(x) = \sqrt{\log(7 - 4x) - \log 7} + \frac{1}{x^2} \log(3x^3 + 8x^2 + 5x + 2)$ allora:

dom f = $]-2,0[$ Svolgim. a pag. 6

4b) Considerate le proposizioni: Svolgim. a pag. 6-7

$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = x + 4 > 0 \qquad \mathbf{Q}(\mathbf{x}) = -x^2 + 8x - 10 < 6 + 16x$.

Dite (motivando la risposta) se è VERA o FALSA la seguente proposizione

$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R} \qquad [\, \mathbf{P}(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{x})]$

Negate la proposizione assegnata e stabilite se la negazione ottenuta è una proposizione VERA o FALSA (motivando la risposta).

5a) Disegnate con precisione sul foglio a quadretti il grafico della seguente funzione, specificando tutti i passaggi necessari per la costruzione di ogni tratto:

$f(x) = |1 - e^x|$. Svolgimento a pag. 7

5b) Disegnate con precisione sul foglio a quadretti il grafico della seguente funzione, specificando tutti i passaggi necessari per la costruzione di ogni tratto:

Svolgimento a pag. 7-8

$$f(x) = \begin{cases} \log(|x|) & \text{se } x \geq -1\,,\ x \neq 0 \\ -1 + \sqrt{x+10} & \text{se } -10 \leq x < -1 \end{cases}$$

dom f = $[-10,0[\,\cup\,]0,+\infty[$, Imm f = $\mathbb{R}$

$f(e) = 1$ " $\log(|e|) = \log e$ $\qquad f(x) = \frac{1}{2} \iff x_1 = \sqrt{e}$ o $x_2 = -\frac{31}{4}$

Svolgim. a pag. 8

6) Determinate l'equazione dell'ellisse passante per il punto $(0, -2 + 2\sqrt{3})$, avente il centro appartenente alla retta $y = -2$, l'ascissa del centro uguale al doppio dell'ordinata del centro e il semiasse relativo alle x uguale a 8 .

Disegnate con precisione l'insieme trovato.

---

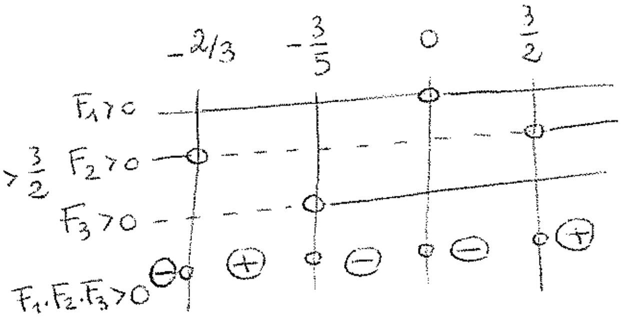
es. 1) E' un sistema di 2 DISEQ.^{ni}:

1^a DIS.^{ne} (PRODOTTO) $x^2\cdot(6x^2-6-5x)\cdot(5x+3)<0$

$F_1>0 \quad x^2>0 \quad \forall x\neq 0$

$F_2>0 \quad 6x^2-5x-6>0 \quad x<-\frac{2}{3} \cup x>\frac{3}{2}$

$F_3>0 \quad 5x+3>0 \quad x>-\frac{3}{5}$



$6x^2-5x-6=0 \quad x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+144}}{12}=$

$=\frac{5\pm13}{12} \nearrow x_1=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$, $\searrow x_2=-\frac{8}{12}=-\frac{2}{3}$

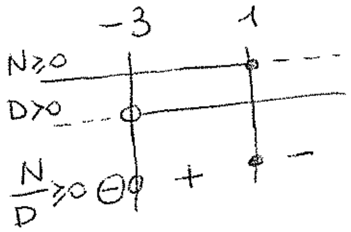
$-\frac{2}{3}<-\frac{3}{5}$ infatti $\frac{2}{3}>\frac{3}{5} \Leftrightarrow 10>9$ vero

SOL.^{ne} 1^a DIS.^{ne} $x\in\left]-\infty,-\frac{2}{3}\right[\cup\left]-\frac{3}{5},0\right[\cup\left]0,\frac{3}{2}\right[=①$

2^a DIS^{ne} (FRATTA) $\frac{1-x}{3+x}\geq 0$

$N\geq 0 \quad 1-x\geq 0 \quad x\leq 1$

$D>0 \quad 3+x>0 \quad x>-3$



Sol.^{ne} 2^a DIS^{ne}

$x\in\left]-3,1\right]=②$

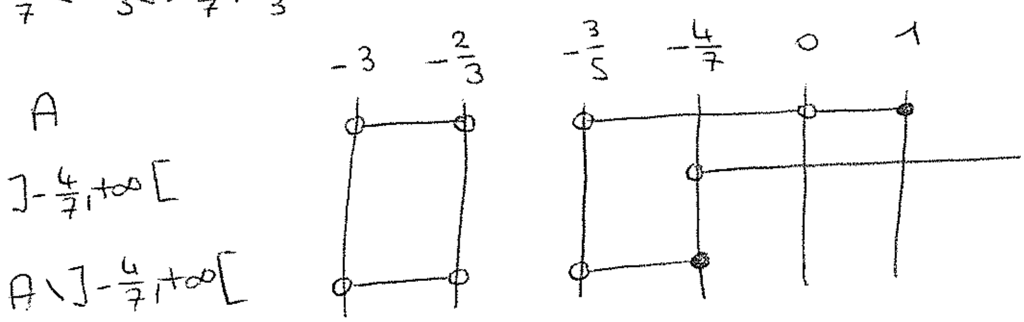
SOL.^{ne} SISTEMA $\begin{cases} 1^a \text{ DIS}^{ne} \\ 2^a \text{ DIS}^{ne} \end{cases} = ①\cap② = \left]-3,-\frac{2}{3}\right[\cup\left]-\frac{3}{5},0\right[\cup\left]0,1\right]$

essendo $1<\frac{3}{2}$ e $-3<-\frac{2}{3}$.

$A=\left]-3,-\frac{2}{3}\right[\cup\left]-\frac{3}{5},0\right[\cup\left]0,1\right]$

$A\setminus\left]-\frac{4}{7},+\infty\right[=\left]-3,-\frac{2}{3}\right[\cup\left]-\frac{3}{5},-\frac{4}{7}\right]$

$-\frac{4}{7}<-\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{7}>\frac{2}{3} \Leftrightarrow 12>14$ Falso $\quad -\frac{4}{7}>-\frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{4}{7}<\frac{3}{5} \Leftrightarrow 20<21$ vero

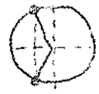


2a) $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$

$2(1-\cos^2 x) - \cos x - 2 = 0$ $\quad$ $2\cos^2 x + \cos x = 0$

$\cos x \cdot (2\cos x + 1) = 0 \iff \cos x = 0$ o $2\cos x + 1 = 0$

$\iff \left(x = \frac{\pi}{2} \text{ o } x = \frac{3}{2}\pi\right)$ o $\cos x = -\frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{2}$ o $x = \frac{3}{2}\pi$ o $x = \frac{2}{3}\pi$ o $x = \frac{4}{3}\pi$

$\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff x = \frac{5}{6}\pi$ o $x = \frac{7}{6}\pi$

$\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff x \in \left[0, \frac{5}{6}\pi\right[\cup \left]\frac{7}{6}\pi, 2\pi\right]$

2c) $\sqrt{25-x^2} \geq -3 \iff \begin{cases} 25 - x^2 \geq 0 \\ -3 < 0 \\ \text{sempre vera} \end{cases}$ o $\begin{cases} 25 - x^2 \geq 0 \\ -3 \geq 0 \ \text{Falsa} \\ (25-x^2) \geq (-3)^2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x^2 \leq 25 \\ \text{s. vera} \end{cases}$ o $\emptyset \iff \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff x \in [-5, 5]$

SOL.ni : $x \in [-5, 5]$

Si poteva più facilmente osservare fin da subito che $\sqrt{f(x)} \geq -3$ è VERA per ogni $x : f(x) \geq 0$ - Infatti se $x \in C.E. \Rightarrow \sqrt{f(x)} \geq 0$ e pertanto sicuramente ≥ -3.

es. 3) La parabola ha equazione $y = a(x-4)^2 + 3$ essendo $V(4,3)$ con $a<0$ perché è rivolta verso il basso.

Passa per $\left(1, -\frac{3}{2}\right) \Rightarrow -\frac{3}{2} = a \cdot 9 + 3 \Rightarrow 9a = -3 - \frac{3}{2} = -\frac{9}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

eq.ne $y = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 3$

le due controimmagini di $y = 1$ sono quindi

$1 = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 3$ $\quad$ $\frac{1}{2}(x-4)^2 = 2$ $\quad$ $(x-4)^2 = 4$ $\quad$ $x - 4 = \pm 2$

$x = 4 \pm 2$ $\quad$ $x_1 = 2$ $\quad$ $x_2 = 6$ -

es. 4a) dom f $\begin{cases} 7-4x>0 & ① \\ 7>0 \text{ vera} \\ \log(7-4x)-\log 7 \geq 0 & ② \\ x^2 \neq 0 & ③ \\ 3x^3+8x^2+5x+2>0 & ④ \end{cases}$

ElMat-30/11/18-6

① $4x<7 \quad x<\frac{7}{4}$

② $\log(7-4x) \geq \log 7 \iff 7-4x \geq 7 \iff -4x \geq 0 \iff x \leq 0$

log x è crescente

③ $x \neq 0$

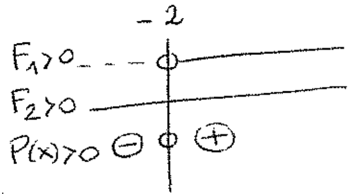
④ è un Polinomio $P(x)=3x^3+8x^2+5x+2$ non si annulla se $x_0>0$

$P(-1)=2 \neq 0 \quad P(-2)=3\cdot(-8)+8\cdot 4+5(-2)+2=-24+32-10+2=0$

$\Rightarrow P(x)=(x+2)(3x^2+2x+1)$

$P(x)>0 \quad F_1>0 \quad x+2>0 \quad x>-2$

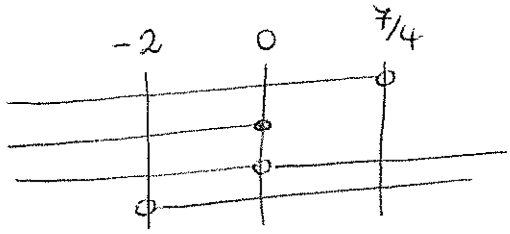
$F_2>0 \quad 3x^2+2x+1>0 \quad \forall x$



$3x^2+2x+1=0 \quad x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-3}}{3} \quad \Delta<0$

$P(x)>0 \iff x>-2$

dom f $\begin{cases} x<\frac{7}{4} \\ x\leq 0 \\ x\neq 0 \\ x>-2 \end{cases}$



dom f $=\bigcap$ delle condizioni

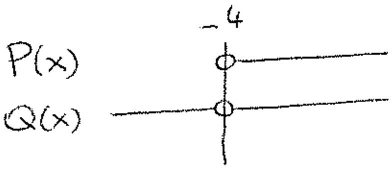
dom f $=]-2,0[$

4b) $P(x): \ x>-4 \qquad Q(x): \ x^2+8x+16>0 \iff (x+4)^2>0$

$\iff x\neq -4$

$P(x): \boxed{x>-4} \qquad Q(x): \boxed{x\neq -4}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x>-4 \Rightarrow x\neq -4$ è VERA perchè se un numero x reale è $x>-4$ sicuramente (a maggior ragione) è $x\neq -4$



(quando P(x) è vera anche Q(x) è vera quindi $P(x)\Rightarrow Q(x)$ è VERA)

OSS. Quando P(x) è FALSA $P(x)\Rightarrow Q(x)$ è sempre VERA.

NEGAZIONE $\exists x \in \mathbb{R}$: $P(x)$ E NON $Q(x)$

(infatti $\Rightarrow$ è Falsa solo se $P(x)$ è vera e $Q(x)$ è Falsa)

Diventa $\exists x \in \mathbb{R}$: $x > -4$ E $x = -4$

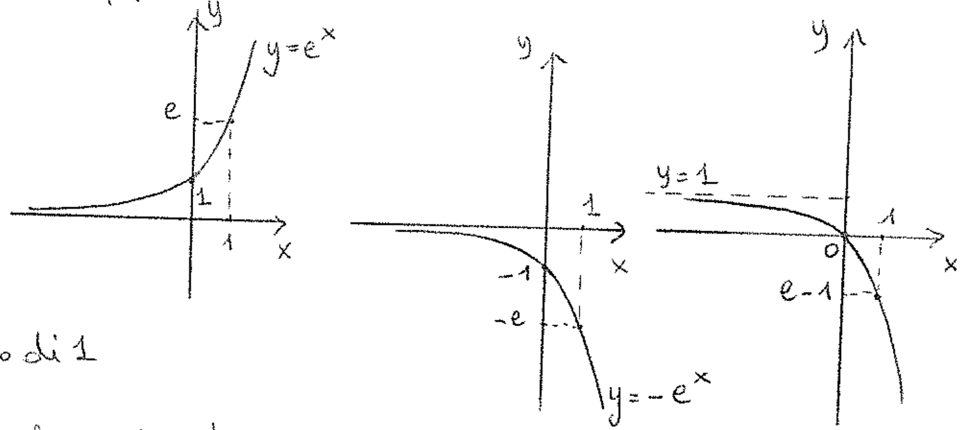
Falsa perché non esiste nessun numero che sia contemporaneamente $= -4$ e > -4.

es. 5a) costruzione

$y = e^x$

$y = -e^x$ simmetrico rispetto all'asse x

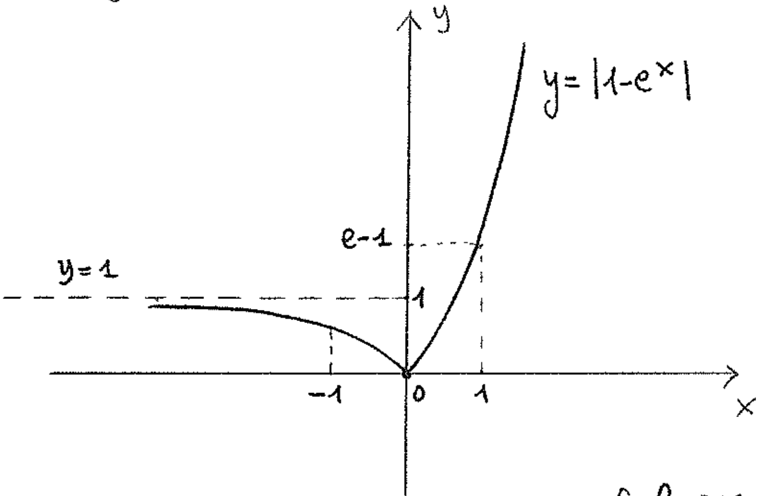
$y = 1 - e^x$ $\quad y = -e^x$ in alto di 1



Infine $y = |1 - e^x|$ significa che la parte di grafico al di sotto dell'asse x viene riflessa al di sopra

$y(-1) = |1 - \frac{1}{e}| \simeq 0{,}63$

$y(1) = |1 - e| = e - 1 \simeq 1{,}7$



OSS. Risulta anche

$$|1 - e^x| = |e^x - 1|$$

(essendo $|a| = |-a|$ $\forall a \in \mathbb{R}$)

e così la costruzione è più semplice.

es. 5b) costruzione $\quad \log|x| = \begin{cases} \log x & x > 0 \\ \log(-x) & x < 0 \end{cases}$ grafico del logaritmo / simmetrico del logaritmo rispetto all'asse y

dom $\log|x| =$

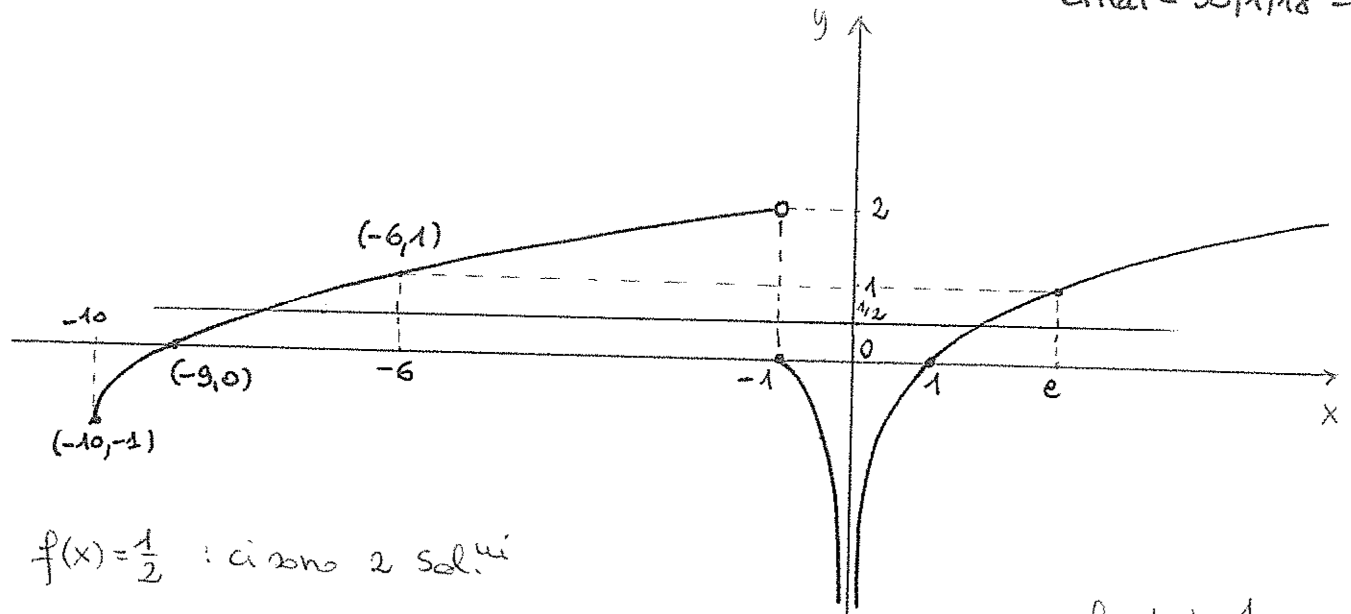
$= \{x \in \mathbb{R} : |x| > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$y = \sqrt{x+10}$ grafico della radice a sinistra di 10

$y = -1 + \sqrt{x+10}$ grafico di $y = \sqrt{x+10}$ in basso di 1.

$y(-10) = -1 \quad y(-9) = 0 \quad y(-6) = 1 \qquad x = -1 \rightarrow \quad -1 + \sqrt{x+10} = -1 + 3 = 2$

$y(-1) = \log|-1| = \log 1 = 0 \quad y(1) = 0 \quad y(e) = \log e = 1$



$f(x)=\frac{1}{2}$: ci sono 2 sol.^{ni}

$-9<x_1<-6$ e $1<x_2<e$

per x_1 $\quad \frac{1}{2}=-1+\sqrt{x+10} \rightarrow \sqrt{x+10}=\frac{3}{2}$

$()^2 \quad x+10=\frac{9}{4} \quad \boxed{x}=\frac{9}{4}-10=\boxed{-\frac{31}{4}}=-7{,}75$

per x_2 $\quad \log|x|=\frac{1}{2} \iff$

$\log|x|=\log\sqrt{e} \underset{\substack{\log \\ \text{biunivoca}}}{\iff} |x|=\sqrt{e}$

$\iff x=\pm\sqrt{e}$ ma $x=-\sqrt{e}<-1$ NON ACC

$\Rightarrow \boxed{x=\sqrt{e}}$

es.6) $\quad y_c=-2 \quad x_c=2y_c=-4 \rightarrow C=(-4,-2)$

$a=8$, b da determinare

eq.^{ne} $\quad \frac{(x+4)^2}{64}+\frac{(y+2)^2}{b^2}=1$ passaggio per $(0,-2+2\sqrt{3})$

$\frac{16}{64}+\frac{(\cancel{-2}+2\sqrt{3}\cancel{+2})^2}{b^2}=1 \qquad \frac{1}{4}+\frac{(2\sqrt{3})^2}{b^2}=1 \qquad \frac{1}{4}+\frac{12}{b^2}=1 \qquad \frac{12}{b^2}=\frac{3}{4}$

$b^2=16 \rightarrow b=4$
$(b>0)$

eq.^{ne} $\quad \frac{(x+4)^2}{64}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$