COGNOME ______	NON SCRIVETE QUI
NOME ______	
MATRICOLA ______	1 2 3 4 5 6
CORSO SEGUITO Mat Fis	

UNIVERSITÀ DI PARMA — C.L. in Matematica e in Fisica

ESAME DI ELEMENTI di MATEMATICA

A.A. 2017-2018 — PARMA, 14 FEBBRAIO 2018

ElMat-14|2|18-1-

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo **in stampatello** cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

Svolgete prima i calcoli in brutta, poi svolgete ordinatamente gli esercizi su un altro foglio protocollo a quadretti, infine **copiate le sole risposte** su questo foglio.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo. Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare la risposta**.

---

1) Considerate i due insiemi $A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 9} \geq -\frac{1}{2}x\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq \frac{49}{4}\}$. Allora:

$A = \ldots]-\infty, -2\sqrt{3}] \cup [3, +\infty[$ $\qquad B = [-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}]$

$A \cup B = \ldots \mathbb{R}$

Svolgim. a pag. 4

2a) Determinate tutte le soluzioni $x \in [0, 2\pi]$ **disegnando tutti gli angoli trovati:**

$\Big(|\tan x| - 1\Big) \cdot \Big(2 \operatorname{sen} x + \sqrt{2}\Big) \cdot \Big(2 \operatorname{sen} x + 3\Big) = 0 \iff x = \frac{\pi}{4}$ o $x = \frac{3}{4}\pi$ o $x = \frac{5}{4}\pi$ o $x = \frac{7}{4}\pi$

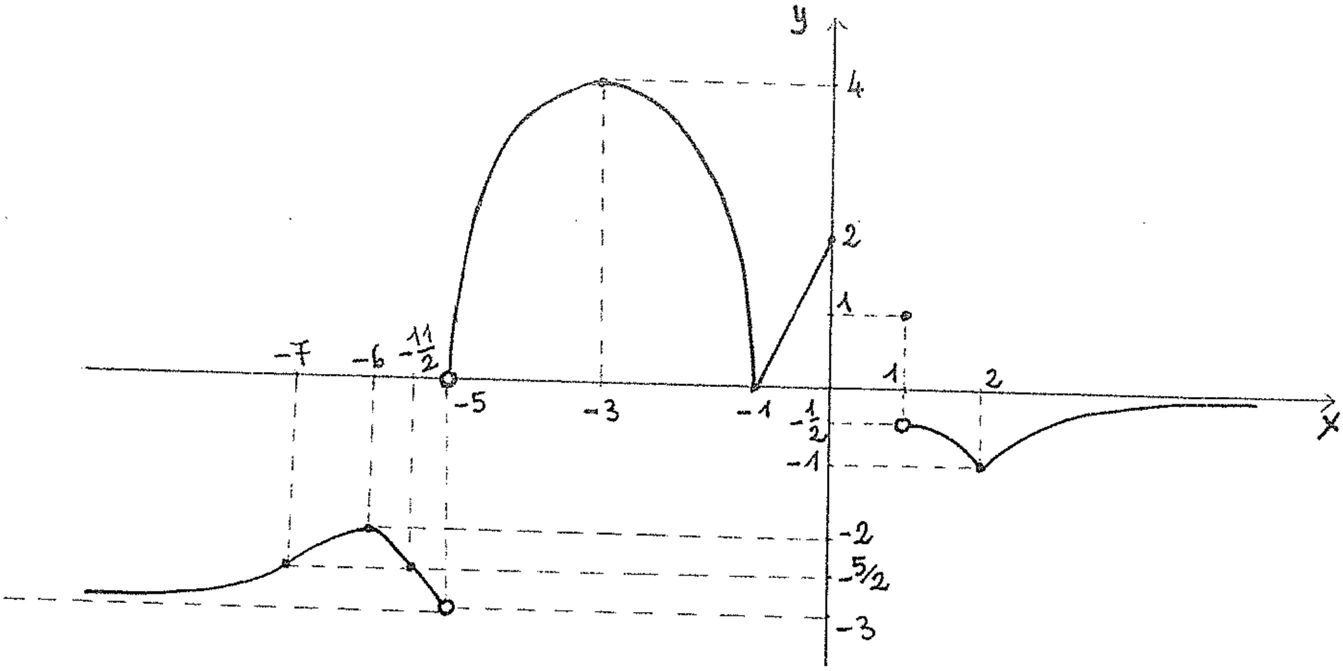
$1 - 2 \operatorname{sen} x \leq 0 \iff \ldots\ldots x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi]$

2b) Completate: $-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{7}{2} - |\frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{11}{2}| > 0 \iff x \in]-\frac{3}{2}, -1[\cup]2, 3[$

2c) Completate: $-\frac{2^4}{8 \cdot 5^2} \cdot \Big(-\frac{5}{2}\Big)^2 - \Big[\frac{3^3}{(-3)^3} - 1^4\Big] = \ldots \frac{3}{2}$

Svolgimento a pag. 5

3) Considerate la funzione f che ha il seguente grafico:



Nota: Il tratto per $x \in]-5 \ -1]$ è il grafico di una semiellisse.

dom f = $]-\infty,-5[\,\cup\,]-5,0]\cup[1,+\infty[$, Imm f = $]-3,-2]\cup[-1,4]$

max f = 4 (punti di max: $x=-3$)

min f = $\nexists$ (punti di min: —)

punti di massimo locale: $x=-6$, $x=-3$, $x=0$, $x=1$ punti di minimo locale: $x=-1$, $x=2$

$f(-5) = \nexists$ $f(1) = 1$ $f(-2) = 2\sqrt{3}$ (svolgim. a pag. 6) $f^{-1}(-\frac{5}{2}) = \{-7, -\frac{11}{2}\}$

Studiate il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$ al variare di $k \in [0, 2]$: a pag. 6

Definizione precisa di funzione **iniettiva**: ci sono 3 Def. equivalenti: si vedano gli appunti delle lezioni

Dite se è VERO o FALSO (motivando IN MODO PRECISO la risposta) che

a) f è iniettiva su $[1, +\infty[$ Falso: poichè $\forall y \in]-1,-\frac{1}{2}[$ y ammette 2 controimmagini (la retta orizzontale $y=y_0 \in]-1,-\frac{1}{2}[$ interseca il grafico due volte)

b) f è iniettiva su $]-\infty, -6]$. VERO, f è MONOTONA STRETTAMENTE CRESCENTE e quindi INIETTIVA (ogni retta orizzontale $y=k$ interseca il grafico una sola volta nel tratto $x \in]-\infty,-6]$)

Svolgim. a pag. 6-7

4a) Se $f(x) = \sqrt{\dfrac{5x^2 - 2x + 2}{2 - x}} + \dfrac{1}{2x^3 - 5x^2} \log\left(3x + \dfrac{3}{2}(x^2 + 1)\right)$ allora:

dom f =]$-\infty$, -1[∪]-1, 0[∪]0, 2[

4b) Considerate le proposizioni:

$\mathbf{P(x)} = 2 - 3x < 0 \qquad \mathbf{Q(x)} = |x| < -2$.

Dopo aver determinato per quali x risultino vere $\mathbf{P(x)}$ e $\mathbf{Q(x)}$, dite (motivando la risposta) se è VERA o FALSA la seguente proposizione

$\exists\ \mathbf{x} \in \mathbf{R} \qquad (\mathbf{P(x)}\ \ \underset{\sim}{\mathrm{e}}\ \ \mathbf{Q(x)})$

Scrivete prima la negazione teorica della proposizione assegnata, poi la negazione esplicita e infine stabilite se la negazione ottenuta è una proposizione VERA o FALSA.

5a) Disegnate con precisione sul foglio a quadretti il grafico della seguente funzione, specificando **tutti i passaggi necessari per la costruzione di ogni tratto e le coordinate dei punti di intersezione con gli assi cartesiani:**

$f(x) = e^{|x|} - 2$. Svolgimento a pag. 8

5b) Disegnate con precisione sul foglio a quadretti il grafico della seguente funzione, specificando **tutti i passaggi necessari per la costruzione di ogni tratto e le coordinate dei punti di intersezione con gli assi cartesiani:**

Svolgim. a pag. 9

$$f(x) = \begin{cases} \left| -\dfrac{1}{2}x^2 - 4x \right| & \text{se } -9 \leq x \leq -2 \\ \\ 1 - \log x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

dom f = [-9, -2] ∪]0, $+\infty$[, Imm f = $\mathbb{R}$

$f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$ $\qquad f(x) = -1 \iff x = e^2$

Svolgim. a pag. 10

6) Determinate con esattezza cosa rappresenti l'insieme di equazione

$4x^2 + 4y^2 + 4xy - 16y - 101 = 4x(y - 2)$. circonferenza di $C(-1, 2)$ e $R = \frac{11}{2}$

Disegnate con precisione l'insieme trovato.

es. 1) $\boxed{A}$ $\quad \sqrt{x^2-9} \geq -\frac{1}{2}x \iff \begin{cases} x^2-9 \geq 0 \quad (C.E.) \\ -\frac{1}{2}x \geq 0 \\ \left(\sqrt{x^2-9}\right)^2 \geq \left(-\frac{1}{2}x\right)^2 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2-9 \geq 0 \quad (C.E.) \\ -\frac{1}{2}x < 0 \end{cases}$

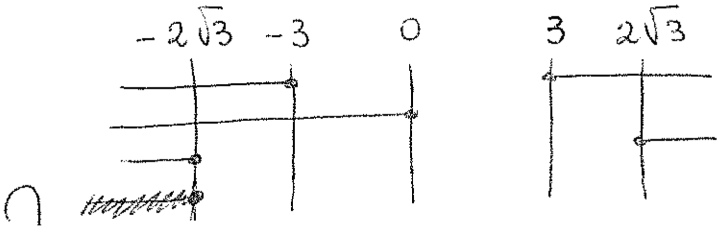
ElMat-14/2/18-4

$$\iff \begin{cases} x \leq -3 \cup x \geq 3 \\ x \leq 0 \\ x^2-9 \geq \frac{1}{4}x^2 \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq -3 \cup x \geq 3 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \leq -3 \cup x \geq 3 \\ x \leq 0 \\ \frac{3}{4}x^2 - 9 \geq 0 \end{cases} \cup \quad x \in [3, +\infty[\quad \iff \begin{cases} x \leq -3 \cup x \geq 3 \\ x \leq 0 \\ x^2 \geq 12 \end{cases} \cup \quad x \in [3, +\infty[$$

$$\iff \begin{cases} x \leq -3 \cup x \geq 3 \\ x \leq 0 \\ x \leq -2\sqrt{3} \cup x \geq 2\sqrt{3} \end{cases} \cup \quad x \in [3, +\infty[$$

$-2\sqrt{3} < -3 \iff 2\sqrt{3} > 3 \iff 12 > 9$ ok



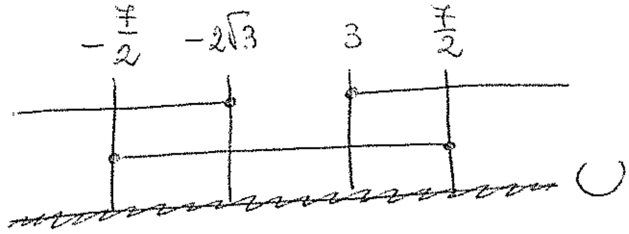
$\iff x \in]-\infty, -2\sqrt{3}] \cup x \in [3, +\infty[$

$\boxed{A =]-\infty, -2\sqrt{3}] \cup [3, +\infty[}$ $\quad \boxed{B = \left[-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right]}$

$\frac{7}{2} = 3{,}5 > 3$

$-\frac{7}{2} < -2\sqrt{3} \iff \frac{7}{2} > 2\sqrt{3} \iff$

$7 > 4\sqrt{3} \iff 49 > 48$ ok

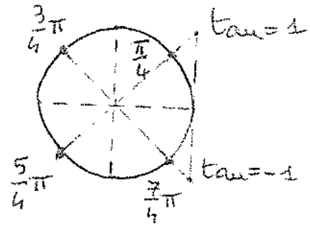


$\boxed{A \cup B = \mathbb{R}}$

es. 2) a) 1° Per la legge di annullamento del prodotto

$$F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 = 0 \iff F_1 = 0 \ \underline{o} \ F_2 = 0 \ \underline{o} \ F_3 = 0$$

$$|\tan x| = 1 \iff \tan x = 1 \ \underline{o} \ \tan x = -1 \iff x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5}{4}\pi \ \underline{o} \ x = \frac{3}{4}\pi, x = \frac{7}{4}\pi$$

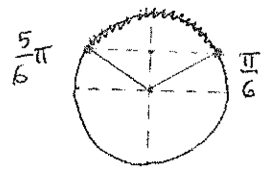


$$\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff x = \frac{5}{4}\pi \ \underline{o} \ x = \frac{7}{4}\pi \qquad \operatorname{sen} x = -\frac{3}{2} \ \text{IMPOSSIBILE}$$

$$-1 \le \operatorname{sen} x \le 1 \ \ \underline{\forall x}$$

<u>SOL.^{ni}</u> : $x = \frac{\pi}{4} \ \underline{o} \ x = \frac{3}{4}\pi \ \underline{o} \ x = \frac{5}{4}\pi \ \underline{o} \ x = \frac{7}{4}\pi$

2° $\operatorname{sen} x \ge \frac{1}{2}$ $\quad \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \ \underline{o} \ x = \frac{5}{6}\pi$

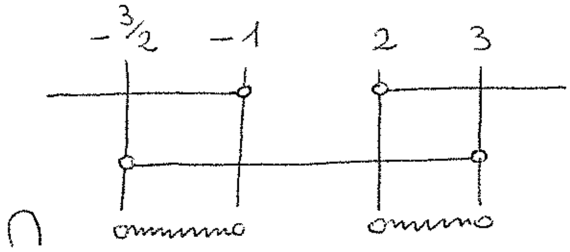


<u>SOL.^{ni}</u> $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$

2b) $$\left|\frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{11}{2}\right| < -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{7}{2} \iff \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{7}{2} < \frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{11}{2} <$$

$$\iff \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{7}{2} < \frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{11}{2} < -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{7}{2}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - x - 2 > 0 \\ 2x^2 - 3x - 9 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x < -1 \ \underline{o} \ x > 2 \\ -\frac{3}{2} < x < 3 \end{cases}$$



<u>SOL.^{ni}</u> $x \in \left]-\frac{3}{2}, -1\right[\cup \left]2, 3\right[$

2c) $$-\frac{2^4}{2^3 \cdot 5^2} \cdot \frac{5^2}{2^2} - \left[\frac{3^3}{-3^3} - 1\right] = -\frac{1}{2} - [-1-1] = -\frac{1}{2} + 2 = \boxed{\frac{3}{2}}$$

es.3) ellisse $C(-3,0)$ $a=2, b=4$

eq.^{ne} $\boxed{\dfrac{(x+3)^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1}$ si considera solo la metà superiore con $y\geq 0$

se $x=-2 \Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{y^2}{16}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{16}=\frac{3}{4}$ $y^2=12$ $y=\pm 2\sqrt{3}$ quella <0 non è accettabile.

$\Rightarrow \boxed{f(-2)=2\sqrt{3}}$

Si può anche scrivere l'eq.^{ne} della metà superiore dell'ellisse

$\frac{y^2}{16}=1-\frac{(x+3)^2}{4}$ $y^2=16\left(1-\frac{(x+3)^2}{4}\right)$ $y=+\sqrt{16\left(1-\frac{(x+3)^2}{4}\right)}$

+ perché metà superiore

$$\boxed{y=4\cdot\sqrt{\frac{4-(x+3)^2}{4}}=2\sqrt{4-(x+3)^2}}$$

e poi calcolare $y(-2)=2\cdot\sqrt{4-1}=2\sqrt{3}$.

$\boxed{f(x)=K}$ $K=0$ 1 sol.^{ne}

$0<K<1,\ 1<K\leq 2$ 3 sol.^{ni}

$K=1$ 4 sol.^{ni}

es.4a) $\text{dom} f=\left\{x\in\mathbb{R}:\ 2-x\neq 0,\ \frac{5x^2-2x+2}{2-x}\geq 0,\ 2x^3-5x^2\neq 0,\ 3x+\frac{3}{2}(x^2+1)>0\right\}$

$$\begin{cases} 2-x\neq 0 \\ \dfrac{5x^2-2x+2}{2-x}\geq 0 & (1) \\ 2x^3-5x^2\neq 0 & (2) \\ \frac{3}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}>0 & (3) \end{cases} \qquad \begin{cases} x\neq 2 \\ x<2 \\ x\neq 0 \text{ e } x\neq \frac{5}{2} \\ x\neq -1 \end{cases}$$

(1) $\Delta=4-40=-36>0$ la dis.^{ne} è verificata $\forall x\in\mathbb{R}$

(2) $x^2(2x-5)\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 0$ e $2x-5\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$ e $x\neq\frac{5}{2}$

(3) $(\cdot\frac{2}{3})$ $x^2+2x+1>0$ $(x+1)^2>0 \Rightarrow \forall x\neq -1$
$\Delta=0$

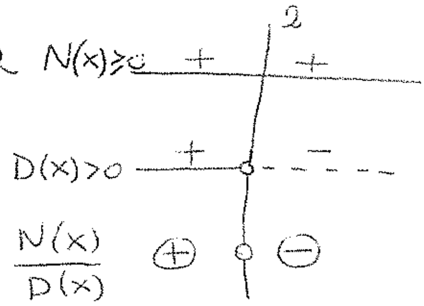
① $\dfrac{N(x)}{D(x)} = \dfrac{5x^2-2x+2}{2-x} \geq 0$

$N(x) \geq 0$ $\quad 5x^2-2x+2 \geq 0$ $\quad$ la dis.^{ne} è VERA $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Delta = 4-40 = -36 < 0$

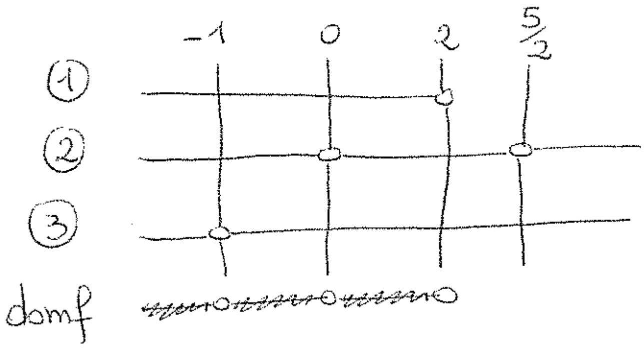
$D(x) > 0 \quad 2-x > 0 \qquad x < 2$

$\dfrac{N(x)}{D(x)} \geq 0 \iff x < 2$



$\boxed{\text{dom} f = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]-1, 0\right[\cup \left]0, 2\right[}$

$\frac{5}{2} > 2$



es 4b) $P(x)$: $x > \frac{2}{3}$

$Q(x)$: sempre falsa

$|x| \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$ e non può mai essere < -2.

$\exists x \in \mathbb{R}$: $P(x)$ e $Q(x)$ è $\boxed{\text{FALSA}}$. Infatti NON ESISTE nessun numero che renda vera sia $P(x)$ sia $Q(x)$ in quanto $Q(x)$ è sempre falsa.

NEGAZIONE TEORICA : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad$ NON $P(x)$ o NON $Q(x)$

NEGAZIONE ESPLICITA : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad x \leq \frac{2}{3}$ o $x \in \mathbb{R}$

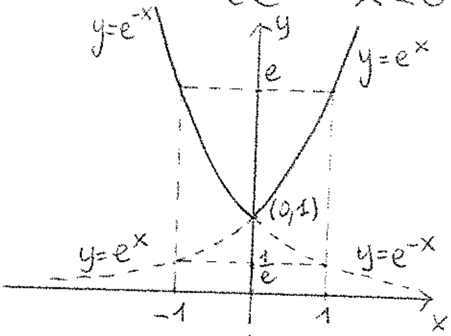
la proposizione ottenuta è $\boxed{\text{VERA}}$ in quanto se $x \leq \frac{2}{3}$ sono vere sia NON $P(x)$ sia NON $Q(x)$, mentre se $x > \frac{2}{3}$ è vera NON $Q(x)$ ed essendo legate da o è sufficiente che sia vera almeno una delle due.

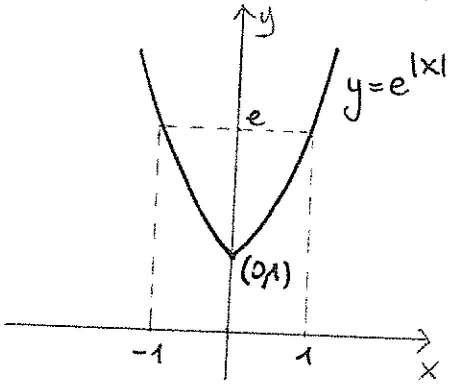
5a) $\text{dom} f = \mathbb{R}$ $\quad f(x) = e^{|x|} - 2$ $\quad$ grafico $y = e^{|x|} - 2$

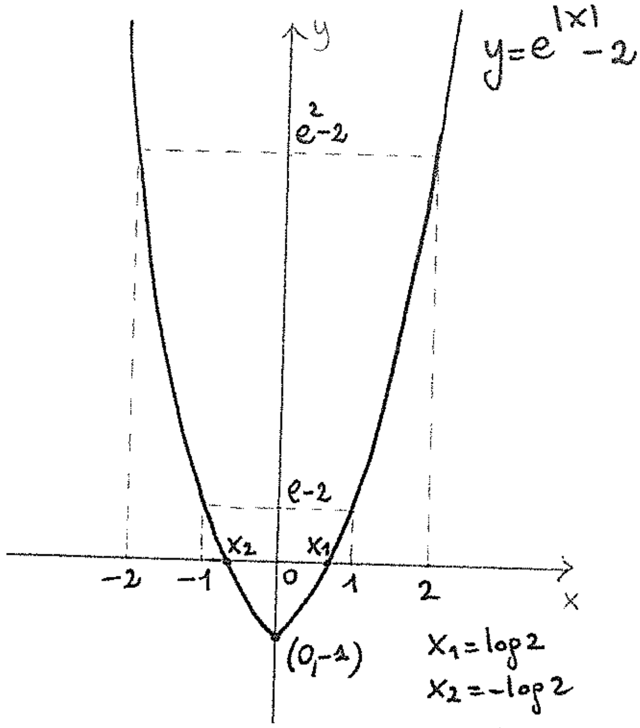
Si tratta di $y = e^{|x|}$ spostato in basso di 2

$$f(x) = e^{|x|} = \begin{cases} e^{x} & x \geq 0 \\ e^{-x} & x < 0 \end{cases}$$

dove $y = e^{-x}$ è il simmetrico di $y = e^{x}$ rispetto all'asse y







se $x = \pm 1 \rightarrow y = e - 2 \simeq 0{,}72$

se $x = \pm 2 \rightarrow y = e^2 - 2 \simeq 5{,}4$

La funzione è simmetrica rispetto all'asse y

$\cap$ asse y : $x = 0 \rightarrow y = -1 \quad (0,-1)$

$\cap$ asse x : $y = 0 \iff e^{|x|} - 2 = 0 \iff e^{|x|} = 2 = e^{\log 2} \iff$ $\quad$ e^x è biunivoca

$|x| = \log 2 \iff x = \pm \log 2 \qquad \log 2 \simeq 0{,}7$

Si può anche svolgere nel seguente modo:

$$f(x) = e^{|x|} - 2 = \begin{cases} e^{x} - 2 & x \geq 0 \quad y = e^{x} \text{ in basso di } 2 \\ e^{-x} - 2 & x < 0 \quad y = e^{-x} \text{ in basso di } 2 \end{cases}$$

es.5b) $y=-\frac{1}{2}x^2-4x$ è una parabola di $V(-4,8)$

rivolta verso il basso

$x_V: -x-4=0 \quad x_V=-4$

$y_V=-\frac{1}{2}\cdot 16+16=8$

che $\cap$ asse x per $-\frac{1}{2}x^2-4x=0 \quad x(-\frac{1}{2}x-4)=0$

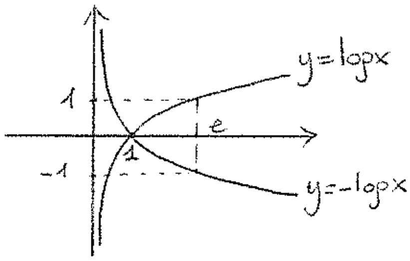
$x_1=0 \quad x_2=-8$

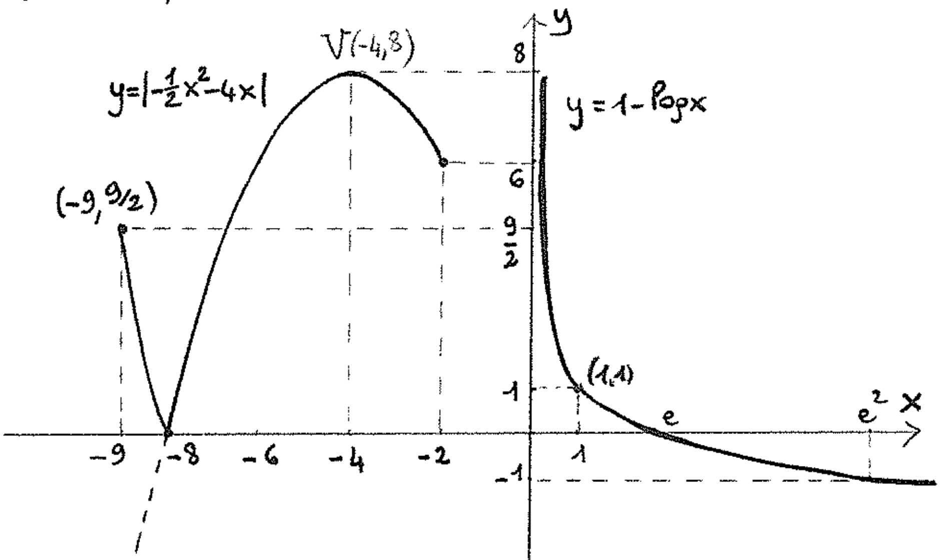
$y(-9)=-\frac{81}{2}+36=\frac{-81+72}{2}=-\frac{9}{2}$

$y(-2)=-\frac{4}{2}+8=-2+8=6$

$y=|-\frac{1}{2}x^2-4x|$ è il grafico della parabola in cui la parte con $y<0$ (cioè per $-9\le x<-8$) viene riflessa rispetto all'asse x.

$y=1-\log x$ è il grafico del logaritmo $y=\log x$, simmetrizzato rispetto all'asse x ($y=-\log x$) e poi alzato di 1 ($y=-\log x+1$).





$\cap$ asse y : ϕ la funzione NON È DEFINITA in $x=0$

$\cap$ asse x : $x=-8$

$1-\log x=0 \rightarrow \log x=1 \rightarrow x=e$

se $x=1 \rightarrow y(1)=1$ se $x=-9$ $y(-9)=|-\frac{9}{2}|=\frac{9}{2}$

$\mathrm{dom} f=[-9,-2]\cup]0,+\infty[\qquad \mathrm{Im} f=\mathbb{R}$

$f(\sqrt{e})=1-\log\sqrt{e}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$f(x)=-1 \iff 1-\log x=-1 \iff \log x=2 \iff x=e^2$

sol.ni solo nel 2° tratto

es.6) $4x^2+4y^2+\cancel{4xy}-16y-101=\cancel{4xy}-8x$

$4x^2+4y^2+8x-16y-101=0$ rappresenta

una CIRCONFERENZA

$(\cdot\frac{1}{4})$ $x^2+y^2+2x-4y-\frac{101}{4}=0$

$(x+1)^2+(y-2)^2=\frac{101}{4}+1+4=\frac{121}{4}=\left(\frac{11}{2}\right)^2$

$(x+1)^2+(y-2)^2=\left(\frac{11}{2}\right)^2$ $C(-1,2)$ $R=\frac{11}{2}=5,5$