COGNOME ______________________

NOME ______________________

MATRICOLA |_|_|_|_|_|_|_|

CORSO SEGUITO Mat Fis

NON SCRIVETE QUI

1	2	3	4

UNIVERSITÀ DI PARMA — C.L. in Matematica e Fisica

ESAME DI ELEMENTI DI MATEMATICA

A.A. 2017-2018 — PARMA, 19 GIUGNO 2018

ElMat-19|6|18-1-

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo **in stampatello** cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

Svolgete prima i calcoli in brutta, poi svolgete ordinatamente gli esercizi su un altro foglio protocollo a quadretti, infine **copiate le sole risposte** su questo foglio.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo. Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento** (o traccia dello svolgimento).

---

0) **PARTE PRELIMINARE** Completate:

a) Se $f(x) = 5x\sqrt{\frac{4}{3}x^2 - 3} - \frac{1}{x-2}\log(\frac{9}{2} + x(\frac{1}{2}x + 3))$ allora:

$\operatorname{dom} f =]-\infty, -3[\cup]-3, -\frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2}, 2[\cup]2, +\infty[$

b) Dati i due insiemi $A = [-3, -\frac{35}{18}[\cup [0, 10]$, $B = [-\frac{17}{9}, 6]$, allora:

$B \setminus A = \ldots [-\frac{17}{9}, 0[$

(sono richiesti i calcoli precisi di tutti i confronti necessari).

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{5^2 - 4^2} = 12$ $\qquad 3x^2 - 4x + 2 < 0 \iff \emptyset$

d) $\cos(-\pi) = -1$ $\qquad \operatorname{sen}(\frac{4}{3}\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \tan(\frac{5}{6}\pi) = \ldots -\frac{\sqrt{3}}{3}$ tan α

$-\pi$

e) $|1 - 4x| \geq 2 \iff \ldots$

$x \in]-\infty, -\frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, +\infty[$

f) La retta r passante per i due punti $(4,1)$ e $(-2,-1)$ ha equazione ..$y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

La retta s per $(2,4)$ perpendicolare alla retta r ha equazione ...$y=-3x+10$

g) Le soluzioni $x \in [0, 2\pi]$ dell'equazione sono (disegnate tutti gli angoli trovati):

$2\cos^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \iff$ ...$x=\frac{\pi}{2}$ o $x=\frac{7}{6}\pi$ o $x=\frac{11}{6}\pi$

h) $(2x-2)\log(\frac{1}{3}x + 2) > 0 \iff$ ...$x \in]-6,-3[\cup]1,+\infty[$

i) Disegnate sul foglio a quadretti con precisione (dominio, intersezioni con gli assi coordinati, punti significativi, asintoti) il grafico delle seguenti funzioni:

$f(x) = e^x - 2, \qquad g(x) = -\log x .$

---

1) Considerate le proposizioni:

$\mathbf{P(x)} : x^2 \leq 16 \qquad \mathbf{Q(x)} : \sqrt{x} \leq 2 .$

Dopo aver determinato per quali x risultino vere $\mathbf{P(x)}$ e $\mathbf{Q(x)}$, dite (motivando la risposta) se è VERA o FALSA la seguente proposizione

$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R} \qquad [\,\mathbf{P(x)} \Rightarrow \mathbf{Q(x)}]$

Scrivete prima la negazione teorica della proposizione assegnata, poi la negazione esplicita e infine stabilite se la negazione ottenuta è una proposizione VERA o FALSA.

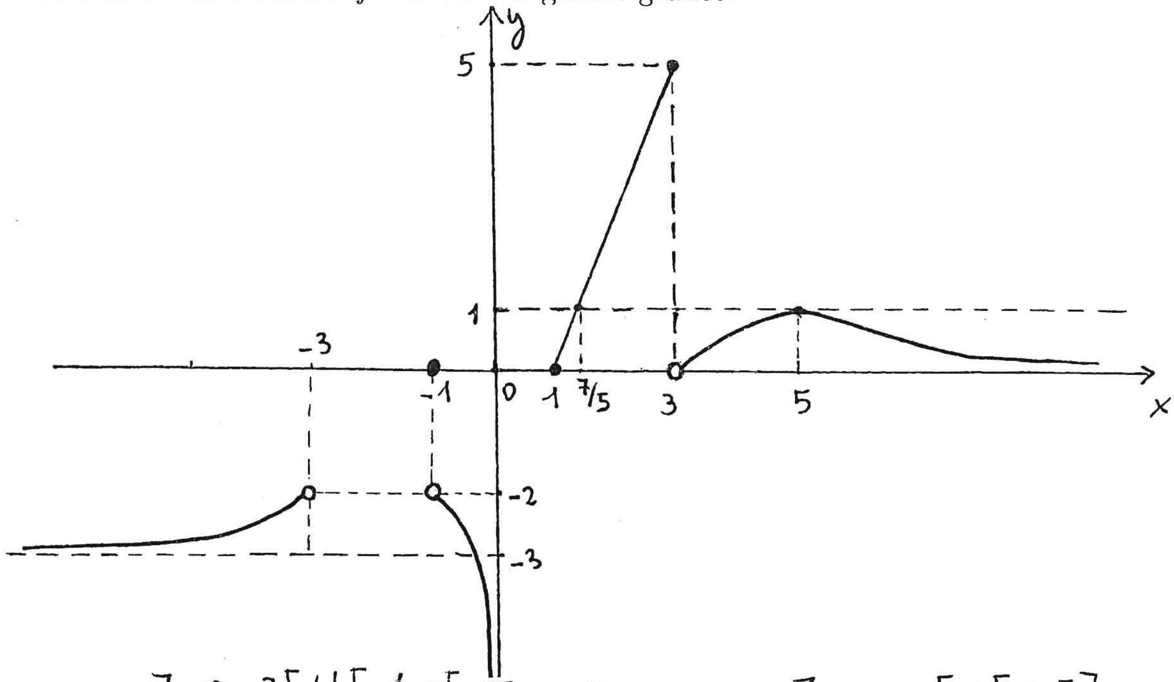
---

2) Determinate l'equazione della parabola passante per il punto $(\frac{3}{2}, 4)$, avente come asse di simmetria la retta $x = \frac{1}{2}$ e che interseca l'asse delle ascisse per $x = -\frac{5}{2}$.

Disegnate con precisione l'insieme trovato.

---

3) Considerate la funzione f che ha il seguente grafico:



dom f = $]-\infty,-3[\,\cup\,[-1,0[\,\cup\,[1,+\infty[$ Imm f = $]-\infty,-2[\,\cup\,[0,5]$

max f = 5 (punti di max: $x=3$)

min f = $\nexists$ (punti di min: —)

punti di massimo locale: $x=-1$, $x=3$, $x=5$ punti di minimo locale: $x=1$

$f(-1) =$ 0 $f(0) =$ NON ESISTE $f(3) =$ 5 $f^{-1}(1) = \{\frac{7}{5}, 5\}$

Il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = -\dfrac{5}{2}$ è: 2

4) Disegnate con precisione sul foglio a quadretti il grafico della seguente funzione (in parte disegnata nella parte preliminare punto i)), specificando tutti i passaggi necessari per la costruzione di ogni tratto, le coordinate dei punti di intersezione con gli assi cartesiani, gli asintoti e eventuali altri punti significativi:

$$f(x) = \begin{cases} \left| e^x - 2 \right| & \text{se } x < 1 \\ \\ -2 + \sqrt{x-1} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

dom f = $\mathbb{R}$

Imm f = $[-2,+\infty[$

$f(-\log 3) = \left|e^{-\log 3} - 2\right| = \left|e^{\log\frac{1}{3}} - 2\right| = \left|\frac{1}{3} - 2\right| = \left|-\frac{5}{3}\right| = \frac{5}{3}$

$m \log a = \log a^m$ $a>0$

$-\log 3 < 0 < 1$

$e^{\log x} = x \quad \forall x > 0$

SOLUZIONE

Es 0)

a) $\mathrm{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : \frac{4}{3}x^2 - 3 \geq 0,\ x - 2 \neq 0,\ \frac{9}{2} + x(\frac{1}{2}x + 3) > 0\}$

$$\begin{cases} x^2 \geq \frac{9}{4} \\ x \neq 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2} > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq -\frac{3}{2} \cup x \geq \frac{3}{2} \\ x \neq 2 \\ x^2 + 6x + 9 > 0 \quad (x+3)^2 > 0 \quad x \neq -3 \end{cases}$$

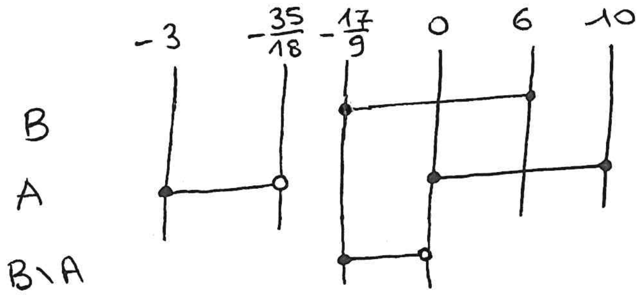
$$\begin{cases} x \in \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[\\ x \neq 2 \\ x \neq -3 \end{cases} \qquad \text{essendo } -3 < -\frac{3}{2} < \frac{3}{2} < 2$$

$\mathrm{dom} f = \left]-\infty, -3\right[\cup \left]-3, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, 2\right[\cup \left]2, +\infty\right[$

b) $-3 < -\frac{35}{18} < -\frac{17}{9} < 0 < 6 < 10$

unico confronto da svolgere $-\frac{35}{18} < -\frac{17}{9} = -\frac{34}{18}$ verificato $(-35 < -34)$

quindi



$B \setminus A = \left[-\frac{17}{9}, 0\right[$

c) $\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{25-16} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$

(IMPORTANTE : non c'è nessuna proprietà del tipo $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$ FALSO
o $\sqrt{a^2-b^2} = a-b$ FALSO)

$3x^2 - 4x + 2 < 0 \quad \Delta < 0 \quad a = 3 > 0 \Rightarrow$ $\cup$ nessuna sol.^{ne}

e) $|1-4x| \geq 2 \iff 1-4x \geq 2$ o $1-4x \leq -2$

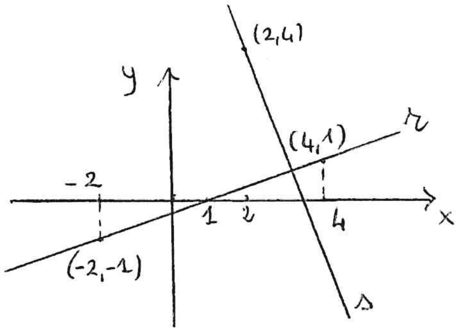
$\iff 4x \leq -1$ o $4x \geq 3$

$\iff x \leq -\frac{1}{4}$ o $x \geq \frac{3}{4} \iff x \in \left]-\infty, -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$

f) $m_r = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$y = 1 + \frac{1}{3}(x-4)$

$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$



$m_s = m_\perp = -\frac{1}{m_r} = -3$

$y = 4 - 3(x-2) \qquad y = -3x + 10$

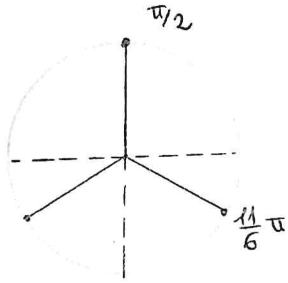
g) $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x \qquad 2(1-\operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen} x - 1 = 0$

$-2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x + 1 = 0 \qquad 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$

$\operatorname{sen} x = t \qquad 2t^2 - t - 1 = 0 \qquad t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \begin{matrix} \nearrow t_1 = 1 \\ \searrow t_2 = -\frac{1}{2} \end{matrix}$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 1$ o $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ o $x = \frac{7}{6}\pi$ o $x = \frac{11}{6}\pi$

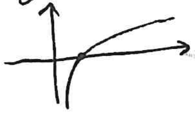


h) è una dis.^{ne} Prodotto : si deve studiare il SEGNO dei Fattori

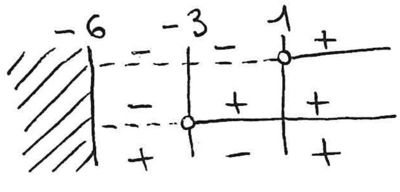
C.E. $\frac{1}{3}x + 2 > 0 \qquad x > -6$

$F_1 \cdot F_2 > 0 \qquad F_1 > 0 \quad 2x - 2 > 0 \quad x > 1$

$F_2 > 0 \quad \log(\frac{1}{3}x + 2) > 0 \qquad \frac{1}{3}x + 2 > 1 \quad \frac{1}{3}x > -1 \quad x > -3$



$\log x > 0 \Leftrightarrow x > 1$



SOL.^{ni} $x \in]-6, -3[\cup]1, +\infty[$

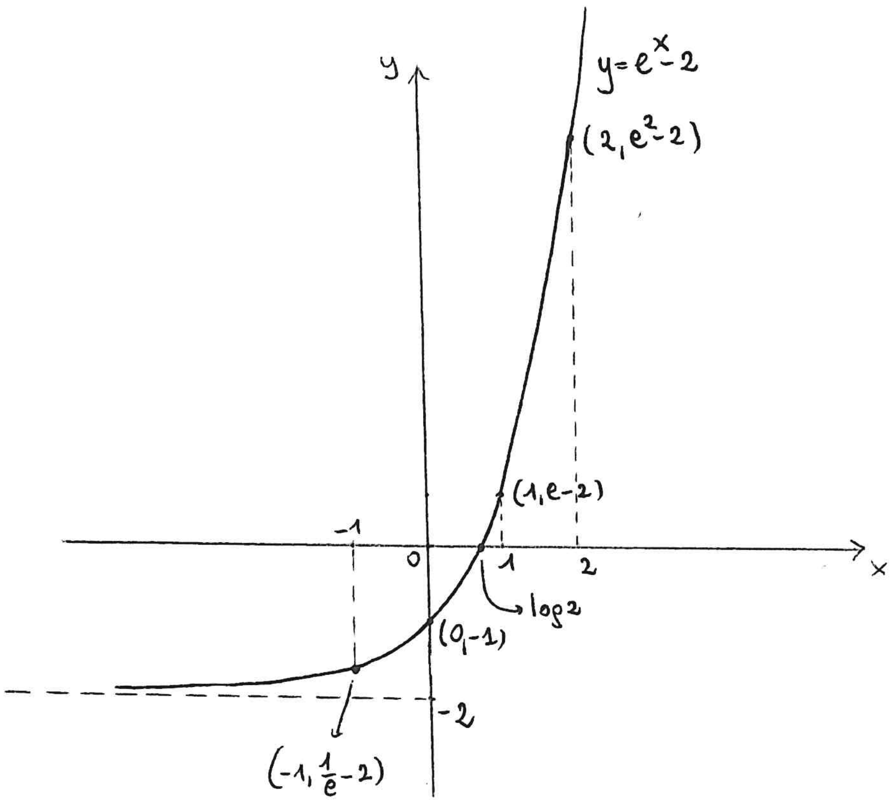
g) $f(x) = e^x - 2 \quad \operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ grafico $y = e^x - 2$ è il grafico dell'esponenziale $(y = e^x)$ abbassato di 2.

ASINTOTO ORIZZONTALE $y = -2$

$\cap$ asse y $(0, -1)$

$\cap$ asse x $\quad e^x - 2 = 0 \quad e^x = 2 \qquad e^x = e^{\log 2} \qquad x = \log 2 \simeq 0,7$

$x = 1 \quad y = e - 2 \simeq 0,7 \qquad x = 2 \quad y = e^2 - 2 \simeq 5,4 \qquad x = -1 \quad y = \frac{1}{e} - 2 \simeq -1,6$



$g(x) = -\log x$ dom $g =]0, +\infty[$ $(x > 0)$

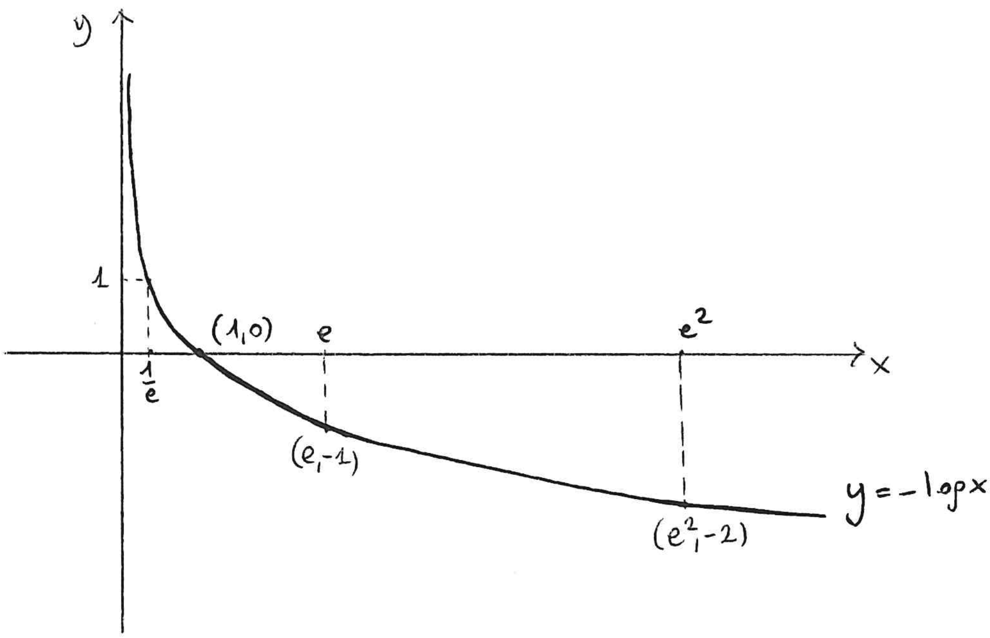
grafico $y = -\log x$: è il grafico del logaritmo $(y = \log x)$

simmetrizzato rispetto all'asse x

asintoti verticali : $x = 0$

$\cap$ asse y : $\emptyset$ $\cap$ asse x : $(1, 0)$

$x = \frac{1}{e}$ $y = 1$ $x = e$ $y = -1$ $x = \underset{\simeq 7{,}4}{e^2}$ $y = -2$



ES. 1) $P(x): \ x \in [-4,4]$

$Q(x): \ \sqrt{x} \le 2 \iff \begin{cases} x \ge 0 \\ x \le 4 \end{cases} \iff x \in [0,4]$

<u>$P(x) \Rightarrow Q(x)$</u>

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \in [-4,4] \Rightarrow x \in [0,4]$ è <u>FALSA</u> perchè per tutti gli $x \in [-4,0[$ $P(x)$ è VERA mentre $Q(x)$ è FALSA.

<u>NEGAZIONE</u> $\left[\exists x \in \mathbb{R} : \text{NON } (P(x) \Rightarrow Q(x))\right] \iff$

$\left[\exists x \in \mathbb{R} : \ P(x) \text{ E } (\text{NON } Q(x))\right] \iff$

$\left[\exists x \in \mathbb{R} : (x \in [-4,4] \text{ E } x \in \,]-\infty,0[\, \cup \,]4,+\infty[\,)\right]$

questa proposizione è VERA per tutti gli $x \in [-4,0[$.

$(\,[-4,4] \cap (\,]-\infty,0[\, \cup \,]4,+\infty[\,) = [-4,0[\,)$.

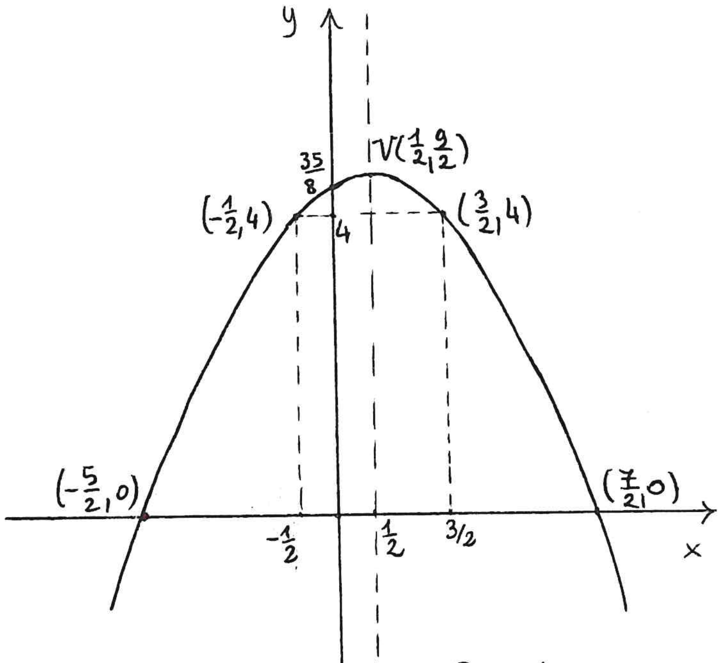
ES.2) Se $x = \frac{1}{2}$ è l'asse di simmetria della parabola $\Rightarrow x_v = \frac{1}{2}$

EQ^{ne}

$y = \pm a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y_v$

dalla posizione dei due punti $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$ e $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ per i quali passa la parabola deduciamo che è rivolta verso il basso

$\Rightarrow \ y = -a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y_v$



Imponendo il passaggio per $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$ e $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ otteniamo

$$\begin{cases} 4 = -a\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + y_v \\ 0 = -a\left(-\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + y_v \end{cases} \quad \begin{cases} 4 = -a + y_v \\ 0 = -9a + y_v \end{cases} \quad \begin{cases} y_v = a + 4 \\ 0 = -9a + a + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 8a = 4 \\ y_v = a + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ y_v = \frac{9}{2} \end{cases} \qquad y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{35}{8}$$

$\cap$ asse y $\left(0, \frac{35}{8}\right)$

$\cap$ asse x $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$

$\left(\frac{7}{2}, 0\right)$

ES. 4) $y = |e^x - 2|$ è il grafico della funzione dell' es. 0) i) in cui per effetto del $|\cdot|$ la parte di grafico con $y < 0$ si ribalta rispetto all'asse x.

$y = -2 + \sqrt{x-1}$ è il grafico (definito per $x \geq 1$) della funzione radice ($y = \sqrt{x}$) spostato a destra di 1 e in basso di 2. Passa per i punti: $(1,-2)$, $(2,-1)$, $(5,0)$, $(10,1)$.