COGNOME ______________________	NON SCRIVETE QUI
NOME ______________________	
MATRICOLA ⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋	
CORSO SEGUITO Mat Fis	1 2 3 4 5

UNIVERSITÀ DI PARMA — C. L. in MATEMATICA e in FISICA

ESAME DI ELEMENTI DI MATEMATICA

A.A. 2017-2018 — PARMA, 5 LUGLIO 2018

ELMat-5/7/18-1-

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo **in stampatello** cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

Svolgete prima i calcoli in brutta, poi svolgete ordinatamente gli esercizi su un altro foglio protocollo a quadretti, infine **copiate le sole risposte** su questo foglio.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo. Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare** **la risposta** .

0) **PARTE PRELIMINARE** Completate: Svolgim. a pag. 4-5

a) Se $f(x) = \sqrt{2 - \frac{x}{2}} + \frac{1}{e^{3x}} \log(x^2(3x+1))$ allora:

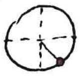
$\operatorname{dom} f =]-\frac{1}{3}, 0[\cup]0, 4]$

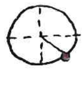
b) Dati i due insiemi $A = [-4, -\frac{20}{11}] \cup [-1, 3]$, $B = [-6, -\frac{15}{8}[$, allora:

$A \setminus B = [-\frac{15}{8}, -\frac{20}{11}] \cup [-1, 3]$

(sono richiesti i calcoli precisi di tutti i confronti necessari).

c) $e^{-\log 4} = \frac{1}{4}$ $\qquad \frac{25 - 9x^2}{3x - 3} < 0 \iff x \in]-\frac{5}{3}, 1[\cup]\frac{5}{3}, +\infty[$





d) $\cos(\frac{5}{3}\pi) = \frac{1}{2}$ $\qquad \operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2}) = -1$ $\qquad \tan(\frac{7}{4}\pi) = -1$

(è richiesto il disegno di ogni angolo).

e) $\sqrt{2x - 3} \leq 3 \iff \begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \text{ (C.E.)} \\ 3 > 0 \quad (\sqrt{A(x)} \leq k \text{ non ha sol.}^{ni} \text{ se } k<0) \\ 2x - 3 \leq 9 \quad ((\sqrt{A(x)})^2 \leq k^2) \end{cases}$ $3>0$ è VERA SEMPRE

$\iff \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \leq 6 \end{cases} \iff x \in [\frac{3}{2}, 6]$

Svolgim. a pag. 5 - 6 - 7

f) L'ellisse di centro $(-4, 2)$ e semiassi 3 e 6 (relativi rispettivamente alla x e alla y) ha

a pag. 5

equazione ... $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{36} = 1$

Disegnate l'ellisse sul foglio a quadretti.

g) Determinate tutte le soluzioni $x \in [0\,,\,2\pi]$ della disequazione $\sqrt{3} - 3\tan x \leq 0$.

a pag. 5

Risposta: ... $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi\right[$

h) $\log(\,x^2\,-\,1\,)\,<\,0 \iff$ ... $x \in \left]-\sqrt{2}, -1\right[\cup \left]1, \sqrt{2}\right[$

pag 5 - 6

i) Disegnate sul foglio a quadretti con precisione (dominio, intersezioni con gli assi coordinati, punti significativi, asintoti) il grafico delle seguenti funzioni:

pag 6

$f(x)\,=\,e^{x+1}$, $\qquad g(x)\,=\,-1\,+\,\mathrm{sen}\,x$.

Per la funzione g è richiesto il disegno del grafico solo per $x \in [-2\pi\,,\,2\pi]$.

---

1) Considerate le proposizioni:

a pag. 7

$\mathbf{P(x)}:\ \frac{1}{4}x^2\,+\,2x\,+\,4\,>\,0 \qquad \mathbf{Q(x)}:\ |\,x\,| \leq 2$.

Dopo aver determinato per quali x risultino vere $\mathbf{P(x)}$ e $\mathbf{Q(x)}$, dite (motivando la risposta) se è VERA o FALSA la seguente proposizione

$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R} \qquad [\ \mathbf{P(x)} \quad \mathbf{o} \quad \mathbf{Q(x)}]$

Scrivete prima la negazione teorica della proposizione assegnata, poi la negazione esplicita e infine stabilite se la negazione ottenuta è una proposizione VERA o FALSA.

---

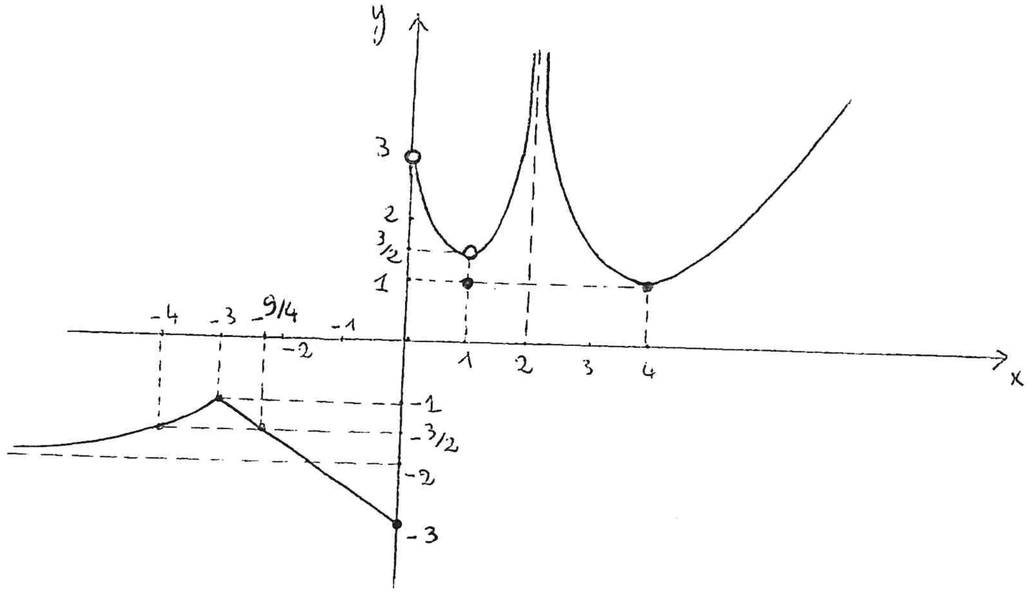
a pag. 7

2) Stabilite che cosa rappresenta l'insieme di equazione $12y + 36 - x^2 - y^2 - 6x = 0$.

Disegnate con precisione l'insieme trovato.

---

3) Considerate la funzione f che ha il seguente grafico:



dom f =]$-\infty$, 2[$\cup$]2, $+\infty$[Imm f = [-3, -1] $\cup$ [1, $+\infty$[

max f = $\nexists$ (punti di max: ———)

min f = -3 (punti di min: $x=0$)

punti di massimo locale: $x=-3$ punti di minimo locale: $x=0$, $x=1$, $x=4$

$f(2) = \nexists$ $f(1) = 1$ $f^{-1}(-\frac{3}{2}) = \{-4, -\frac{9}{4}\}$ $f^{-1}(1) = \{1, 4\}$

Il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = \dfrac{5}{2}$ è: 4

4) Disegnate con precisione sul foglio a quadretti il grafico della seguente funzione (in parte disegnata nella parte preliminare punto i)), specificando tutti i passaggi necessari per la costruzione di ogni tratto, le coordinate dei punti di intersezione con gli assi cartesiani, gli asintoti e eventuali altri punti significativi:

A pag. 8

$$f(x) = \begin{cases} -e^{x+1} & \text{se } x \le 0 \\ \\ \left| -\dfrac{4}{5}x^2 + 4x \right| & \text{se } 0 < x \le 6 \end{cases}$$

dom f =]$-\infty$, 6]

Imm f = [$-e$, 5]

$f(0) = -e$ $f(\log 2 - 1) = -e^{\log 2 - 1 + 1} = -e^{\log 2} = -2$

$\log 2 - 1 < 0$

SOLUZIONE

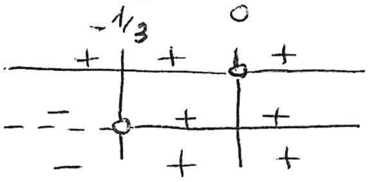
es. 0) a) $\mathrm{dom} f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 2 - \frac{x}{2} \geq 0, \; e^{3x} \neq 0, \; x^2(3x+1) > 0 \right\}$

$$\begin{cases} 2 - \frac{x}{2} \geq 0 \\ e^{3x} \neq 0 \\ x^2(3x+1) > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 4 \\ \forall x \\ x \in \left]-\frac{1}{3}, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[\end{cases} \qquad \mathrm{dom} f = \left]-\tfrac{1}{3}, 0\right[\cup \left]0, 4\right]$$

$x^2(3x+1) > 0$ è una disequazione prodotto:

$F_1 = x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$

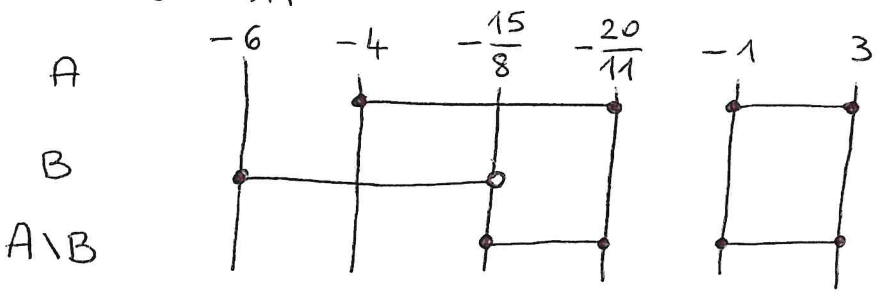
$F_2 = 3x+1 > 0 \quad x > -\frac{1}{3}$



$F_1 \cdot F_2 > 0$ se $x \in \left]-\frac{1}{3}, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[$

b) Poiché $-2 < -\frac{20}{11} < -1$ e $-2 < -\frac{15}{8} < -1$ dobbiamo confrontare $-\frac{20}{11}$ e $-\frac{15}{8}$; $-\frac{20}{11} < -\frac{15}{8} \iff \frac{20}{11} > \frac{15}{8} \iff 160 > 161$ Falso

$\Rightarrow -\frac{15}{8} < -\frac{20}{11}$



$A \setminus B = \left[-\frac{15}{8}, -\frac{20}{11}\right] \cup \left[-1, 3\right]$

c) $e^{-\log 4} = e^{\log \frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$

$m \log a = \log a^m$, $a > 0$

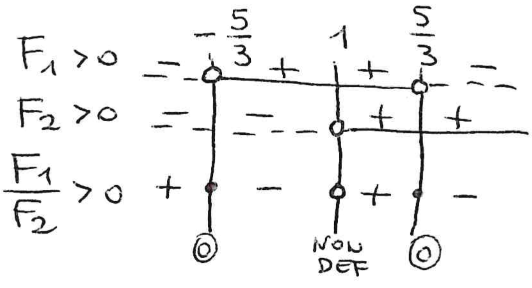
$e^{\log x} = x \quad \forall x > 0$

$\frac{25 - 9x^2}{3x - 3} < 0$ è una dis.^{ne} fratta

$F_1 = 25 - 9x^2 > 0 \quad x^2 < \frac{25}{9} \quad -\frac{5}{3} < x < \frac{5}{3}$

$F_2 = 3x - 3 > 0 \quad x > 1$

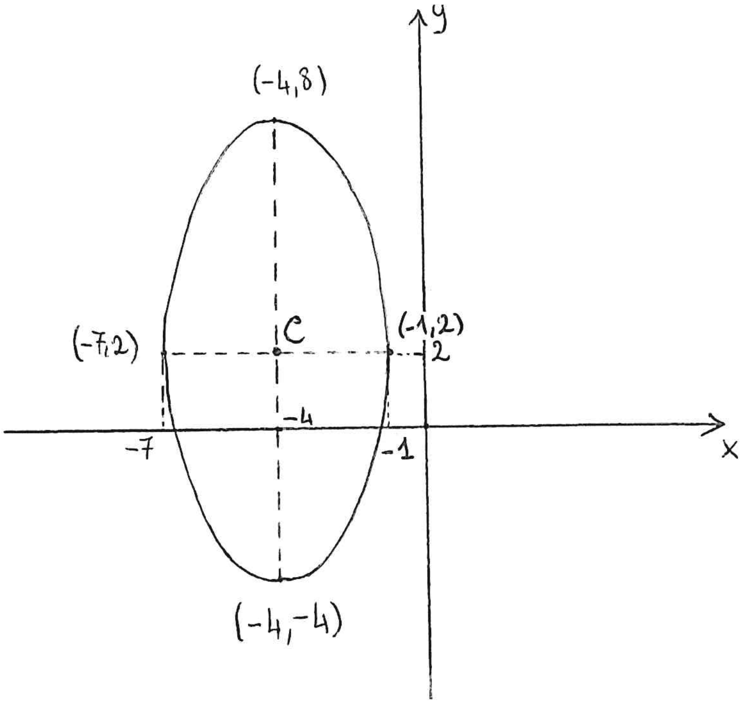
C.E. Den $\neq 0$ $\quad x \neq 1$



Essendo richiesto $\frac{F_1}{F_2} < 0$ la sol.^{ne} è

$x \in \left]-\frac{5}{3}, 1\right[\cup \left]\frac{5}{3}, +\infty\right[$

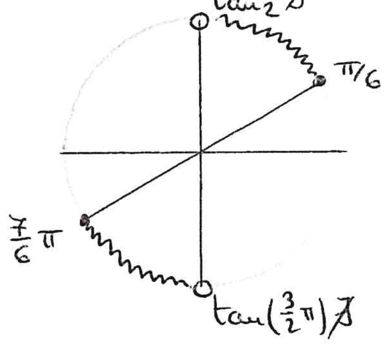
f) $C(-4,2)$ $a=3$ $b=6$



g) $\tan x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \iff x = \frac{\pi}{6}$

$x = \frac{7}{6}\pi$



SOL.ni $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[\cup [\frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi[$.

h) $\log(x^2-1) < 0 \iff \begin{cases} x^2-1>0 & (C.E.) \\ x^2-1<1 \end{cases}$

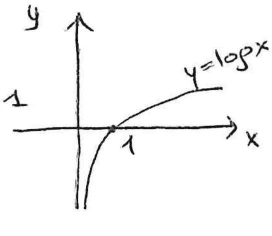
$(\log x < 0 \iff 0 < x < 1$

$\Updownarrow$ C.E. $x>0$

$\log x < \log 1$

$\Updownarrow$ C.E. $x>0$

$0 < x < 1$



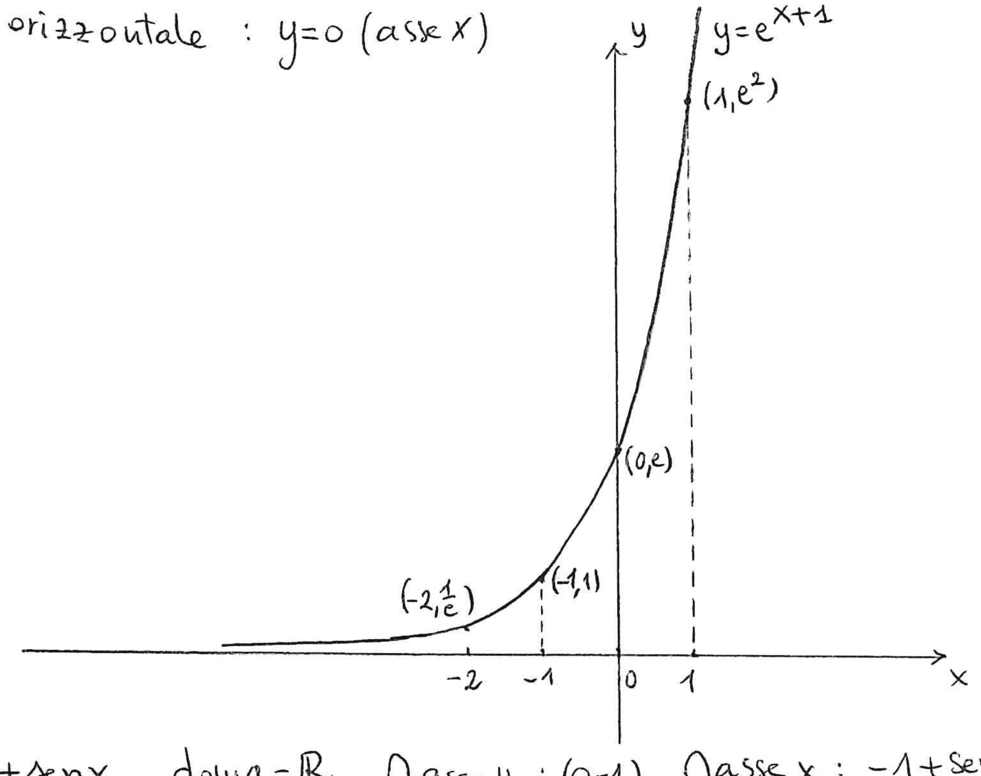
$$\begin{cases} x<-1 \ \text{o} \ x>1 \\ x^2<2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\\ x \in]-\sqrt{2},\sqrt{2}[\end{cases}$$

Sol.^{ni} $x \in]-\sqrt{2},-1[\cup]1,\sqrt{2}[$ essendo $\sqrt{2}>1$ ($\sqrt{2} \approx 1{,}414$ oppure $\sqrt{2}>1 \Leftrightarrow 2>1$)

i) $f(x)=e^{x+1}$ dom$f=\mathbb{R}$ $\cap$ asse x ϕ $\cap$ asse y : $(0,e)$

grafico: $y=e^{x+1}$ si tratta del grafico dell'esponenziale ($y=e^x$) a sinistra di 1. Passa per $(-2,\frac{1}{e})$, $(-1,1)$, $(1,e^2)$.

asintoto orizzontale : $y=0$ (asse x)

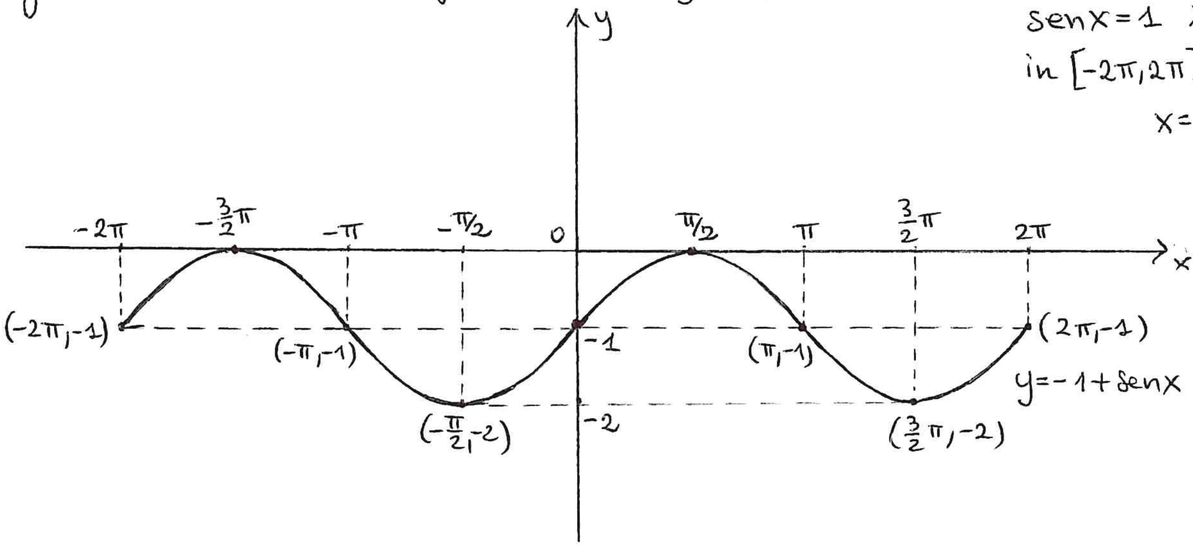


$g(x)=-1+\operatorname{sen}x$ dom$g=\mathbb{R}$ $\cap$ asse y : $(0,-1)$ $\cap$ asse x : $-1+\operatorname{sen}x=0$

$\operatorname{sen}x=1$ $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

in $[-2\pi,2\pi]$ abbiamo

$x=-\frac{3}{2}\pi$ $x=\frac{\pi}{2}$



ES. 1) $P(x)$: $x^2+8x+16>0$ $\quad (x+4)^2>0 \quad \forall x \neq -4$

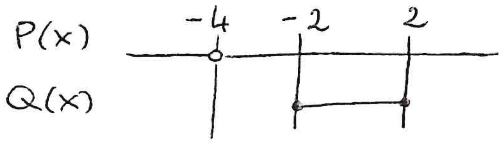
$P(x)$: $x \in]-\infty,-4[\cup]-4,+\infty[$

$Q(x)$: $|x| \leq 2 \iff -2 \leq x \leq 2$

$Q(x)$: $x \in [-2,2]$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x)$ o $Q(x)$ è FALSA

Significa che $\forall x \in \mathbb{R}$ almeno una delle 2 proposizioni $P(x)$, $Q(x)$ risulta vera, ma per $x=-4$ le altre proposizioni sono entrambe false



NEGAZIONE : NON ($\forall x \in \mathbb{R}$ $P(x)$ o $Q(x)$) $\iff$

$\exists x \in \mathbb{R}$: NON $P(x)$ e NON $Q(x)$ $\iff$

$\exists x \in \mathbb{R}$: $x=-4$ e ($x \in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$)

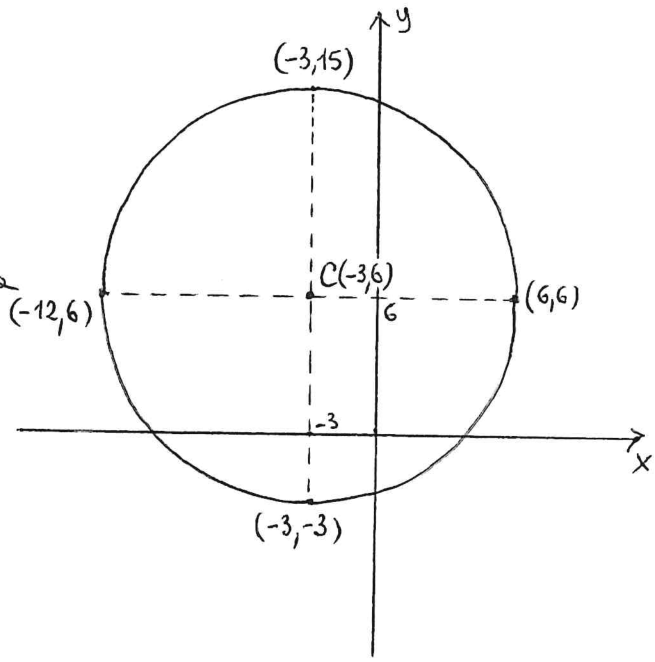
questa proposizione è VERA : $\exists x \in \mathbb{R}$ ed è $x=-4$, l'unico numero reale che verifica sia NON $P(x)$ sia NON $Q(x)$.

2) $x^2+y^2+6x-12y-36=0$

$(x+3)^2-9+(y-6)^2-36-36=0$

$(x+3)^2+(y-6)^2=81$

Si tratta dunque della circonferenza di $C(-3,6)$ e $R=9$.



ES.4) 1° tratto : $y=e^{x+1}$ è già stata disegnata nell' es. 0) i)

$y=-e^{x+1}$ è il simmetrico di $y=e^{x+1}$ rispetto all'asse x

asintoto orizzontale : $y=0$ PUNTI : $(-2,-\frac{1}{e})$ $(-1,-1)$ $(0,-e)$

2° tratto : $y=-\frac{4}{5}x^2+4x$ è la parabola di $V\left(\frac{-4}{-8/5}, y_V\right)=\left(\frac{5}{2},5\right)$

verso il basso, $\cap$ asse x $(0,0)$ $(10,0)$

$y_V=-\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}+4\frac{5}{2}=-5+10=5$

$x=6 \rightarrow y=-\frac{4\cdot 36}{5}+24=-\frac{144}{5}+\frac{120}{5}=-\frac{24}{5}=-4{,}8$

$y=\left|-\frac{4}{5}x^2+4x\right|$ si ottiene dal grafico di $y=-\frac{4}{5}x^2+4x$ ribaltando rispetto all'asse x la parte del grafico con $y<0$ e lasciando inalterata la parte con $y\geq 0$. se $x=6$ $y=\left|-\frac{24}{5}\right|=\frac{24}{5}$