| | |
|---|---|
| COGNOME ______________________ | NON SCRIVETE QUI |
| NOME ______________________ | |
| MATRICOLA ⌊ ⌊ ⌊ ⌊ ⌊ ⌊ ⌊ ⌋ | 1 2 3 4 5 |
| CORSO SEGUITO Mat Fis | |

UNIVERSITÀ DI PARMA — C.L. in MATEMATICA e in FISICA

ESAME DI ELEMENTI DI MATEMATICA

A.A. 2017-2018 — PARMA, 18 LUGLIO 2018

ElMat - 18/7/18 - 1 -

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo **in stampatello** cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

Svolgete prima i calcoli in brutta, poi svolgete ordinatamente gli esercizi su un altro foglio protocollo a quadretti, infine **copiate le sole risposte** su questo foglio.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo. Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento** (o traccia dello svolgimento).

---

0) **PARTE PRELIMINARE** Completate:

a) Se $f(x) = \log(\frac{49}{4} - x(7-x)) - \frac{1}{x^2-9}\sqrt{8x - x^2} +$ allora:
a pag. 4

$\operatorname{dom} f = \ldots\ldots [0,3[ \cup ]3,\frac{7}{2}[ \cup ]\frac{7}{2},8]$

b) Dati i due insiemi $A = [-3, -\frac{7}{8}[ \cup [0,4]$, $B = [-5, -\frac{9}{11}]$, allora:
a pag. 4

$B \setminus A = \ldots [-5,-3[ \cup [-\frac{7}{8}, -\frac{9}{11}]$

(sono richiesti i calcoli precisi di tutti i confronti necessari).

a pag. 4

c) $|e^{-\log 5} - 1| = \ldots 4/5$ $\qquad x^2\, e^{-3x-1} > 0 \iff \ldots x \in ]-\infty,0[ \cup ]0,+\infty[$

$(x \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$ $(\forall x \neq 0)$


d) $\operatorname{sen}(-\frac{5}{6}\pi) = \ldots -\frac{1}{2}$ $\qquad \cos(\frac{5}{4}\pi) = \ldots -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \tan(\frac{4}{3}\pi) = \ldots \sqrt{3}$

(è richiesto il disegno di ogni angolo).

e) $|x^2 - 6| \leq 3 \iff \ldots\ldots x \in [-3, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 3]$
a pag. 5

EliMat - 18/7/18 - 2 -

f) L'insieme di equazione $\dfrac{1}{2}x^2 + y - \dfrac{7}{2}x - \dfrac{15}{8} = 0$ rappresenta $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{15}{8}$
a pag. 5
la parabola di $V(\frac{7}{2}, 8)$, verso il basso, $\cap$ asse y $(0, \frac{15}{8})$, $\cap$ asse x $(-\frac{1}{2}, 0)(\frac{15}{2}, 0)$
...

Disegnate l'insieme con precisione sul foglio a quadretti.

g) Le soluzioni $x \in [0, 2\pi]$ dell'equazione sono (disegnate tutti gli angoli trovati):
a pag. 5
$$-6\cos x - 12 \operatorname{sen} x \cos x = 0 \iff \left(x = \frac{\pi}{2} \text{ o } x = \frac{3}{2}\pi\right) \text{ o } \left(x = \frac{7}{6}\pi \text{ o } x = \frac{11}{6}\pi\right)$$

h) $$\frac{\log(3x + 3)}{2x + 1} > 0 \iff x \in \left]-1, -\frac{2}{3}\right[ \cup \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$$
a pag 5-6

i) Disegnate sul foglio a quadretti con precisione (dominio, intersezioni con gli assi coordinati, punti significativi, asintoti) il grafico delle seguenti funzioni:
Svolgim. a pag. 6
$$f(x) = \log(x-2), \qquad g(x) = 1 + \cos x .$$

Per la funzione $g$ è richiesto il disegno del grafico solo per $x \in [-2\pi, 2\pi]$ .

---

Svolgimento a pag. 7

1) Considerate le proposizioni:

$$\mathbf{P(x)} : \sqrt{x-1} \leq 3 \qquad \mathbf{Q(x)} : e^x \geq 1 .$$

Dopo aver determinato per quali $x$ risultino vere $\mathbf{P(x)}$ e $\mathbf{Q(x)}$ , dite (motivando la risposta) se è VERA o FALSA la seguente proposizione

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R} \qquad [\ \mathbf{P(x)} \Rightarrow \mathbf{Q(x)}]$$

Scrivete prima la negazione teorica della proposizione assegnata, poi la negazione esplicita e infine stabilite se la negazione ottenuta è una proposizione VERA o FALSA.

---

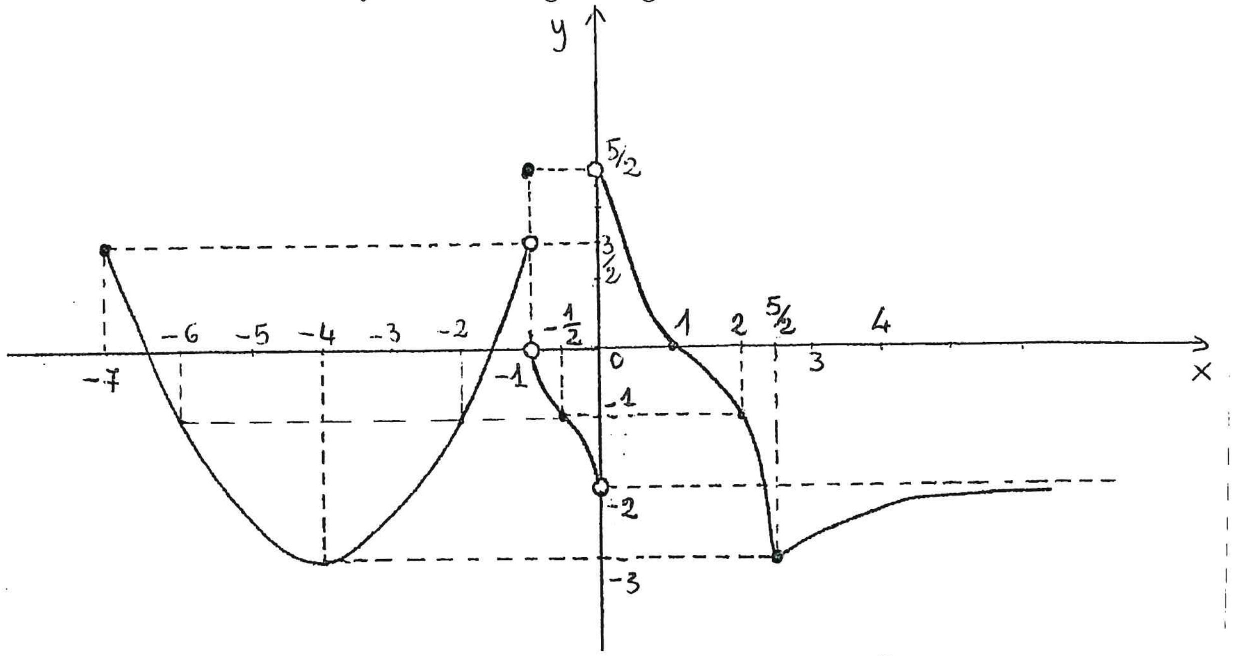
Svolgim. a pag. 7

2) Determinate l'equazione dell'ellisse passante per il punto $(0, 3 - 4\sqrt{2})$ , avente il centro appartenente alla retta $x = 1$ , l'ordinata del centro uguale al triplo dell'ascissa del centro e il semiasse relativo alle y uguale a 6 .

Disegnate con precisione l'insieme trovato.

---

3) Considerate la funzione $f$ che ha il seguente grafico:




dom $f$ = $[-7,0[\cup]0,+\infty[$ , Imm $f$ = $[-3, \frac{5}{2}]$

max $f$ = $\frac{5}{2}$ (punti di max: $x=-1$ )

min $f$ = $-3$ (punti di min: $x=-4$, $x=\frac{5}{2}$ )

punti di massimo locale: $x=-7$, $x=-1$ punti di minimo locale: $x=-4$, $x=\frac{5}{2}$

$f(1) = 0$ $f(0) = \nexists$ $f(-1) = \frac{5}{2}$ $f^{-1}(-1) = \{-6,-2,-\frac{1}{2},2\}$

Il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = \dfrac{3}{2}$ è: 2

---

4) Disegnate con precisione sul foglio a quadretti il grafico della seguente funzione (in parte disegnata nella parte preliminare punto i) ), specificando tutti i passaggi necessari per la costruzione di ogni tratto, le coordinate dei punti di intersezione con gli assi cartesiani, gli asintoti e eventuali altri punti significativi:

Svolgim. a pag. 8

$$f(x) = \begin{cases} -\log(x-2) & \text{se } x > 2 \\ \\ \left|-2+\sqrt{x+6}\right| & \text{se } -6 \le x \le 2 \end{cases}$$

dom $f$ = $[-6,+\infty[$

Imm $f$ = $\mathbb{R}$

$f(2) = 2\sqrt{2}-2$ $f(\sqrt{e}+2) = -\frac{1}{2}$

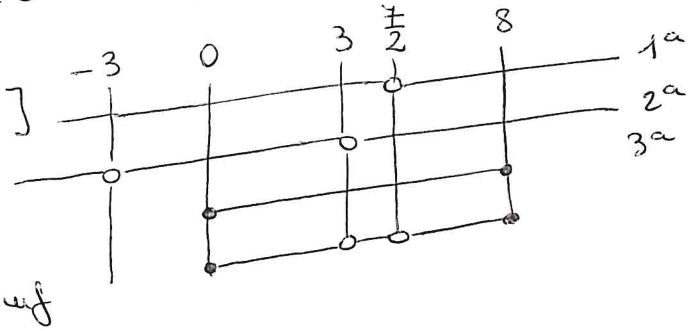
ElMat - 18/7/18 - 4

## SOLUZIONE

Es 0) a) $\mathrm{dom} f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{49}{4} - x(7-x) > 0,\ x^2 - 9 \neq 0,\ 8x - x^2 \geq 0 \right\}$

$$\begin{cases} x^2 - 7x + \frac{49}{4} > 0 \\ x^2 - 9 \neq 0 \\ x^2 - 8x \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-49}}{2} = \frac{7}{2} \qquad \forall x \neq \frac{7}{2} \\ x \neq \pm 3 \\ x(x-8) \leq 0 \qquad x \in [0, 8] \end{cases}$$

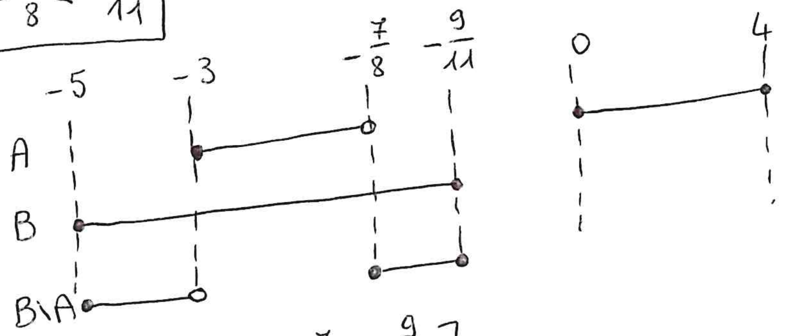
$\mathrm{dom} f = [0, 3[ \cup ]3, \frac{7}{2}[ \cup ]\frac{7}{2}, 8]$




b) Poiché $-1 < -\frac{7}{8} < 0$, $-1 < -\frac{9}{11} < 0$ e $-5 < -3 < 0 < 4$

dobbiamo confrontare $-\frac{7}{8}$ e $-\frac{9}{11}$ : $-\frac{7}{8} < -\frac{9}{11} \Leftrightarrow \frac{7}{8} > \frac{9}{11} \Leftrightarrow 77 > 72$ vero

$\Rightarrow \boxed{-\frac{7}{8} < -\frac{9}{11}}$




$B \setminus A = [-5, -3[ \cup [-\frac{7}{8}, -\frac{9}{11}]$

c) $\left| e^{-\log 5} - 1 \right| = \left| e^{\log \frac{1}{5}} - 1 \right| = \left| \frac{1}{5} - 1 \right| = \left| -\frac{4}{5} \right| = \frac{4}{5}$

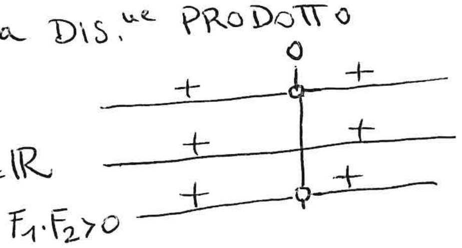
$-\log n = \log \frac{1}{n}$ $\qquad$ $e^{\log x} = x \quad \forall x > 0$

$x^2 \cdot e^{-3x-1} > 0$ è una Dis.ne PRODOTTO

$F_1(x) = x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$

$F_2(x) = e^{-3x-1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$(e^x > 0 \ \forall x)$



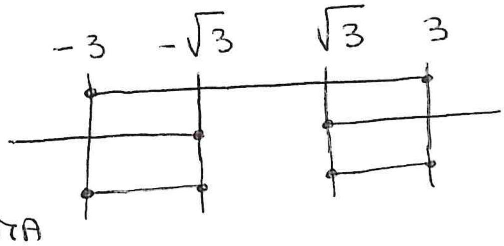

SOL.ne

$\forall x \neq 0$

ElMat - 18/7/18 - 5

e) $|x^2-6| \leq 3 \iff \begin{cases} x^2-6 \leq 3 \\ x^2-6 \geq -3 \end{cases}$ (cioè $-3 \leq x^2-6 \leq 3$)

$\iff \begin{cases} x^2 \leq 9 \\ x^2 \geq 3 \end{cases} \iff \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ x \leq -\sqrt{3} \ \underline{o} \ x \geq \sqrt{3} \end{cases}$




SOL.ni SISTEMA

SOL.ne $x \in [-3, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 3]$.

f) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{15}{8}$ è la parabola di $V\left(\frac{7}{2}, 8\right)$

$x_V = -\frac{7/2}{-1} = \frac{7}{2}$ $\quad y_V = -\frac{1}{2}\left(\frac{49}{4}\right) + \frac{49}{4} + \frac{15}{8} = -\frac{49}{8} + \frac{49}{4} + \frac{15}{8} = \frac{49}{8} + \frac{15}{8} = \frac{64}{8} = 8$

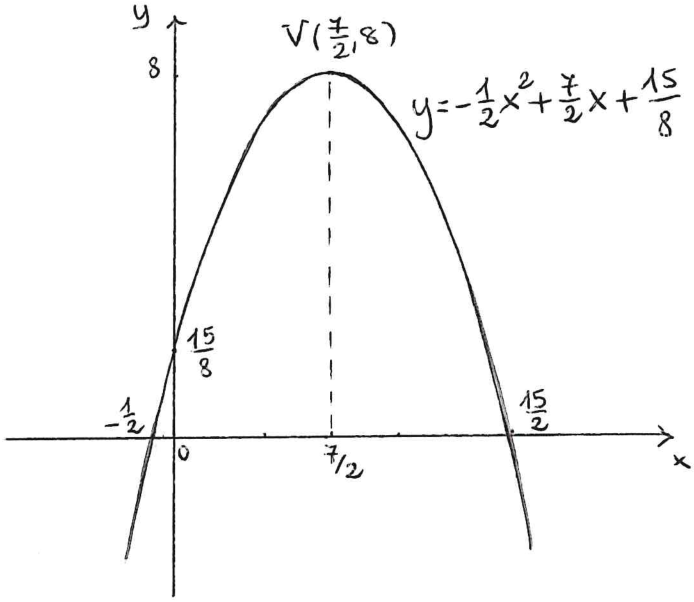
rivolta verso il basso

$\cap$ asse y : $\left(0, \underbrace{\frac{15}{8}}_{=1{,}875}\right)$

$\cap$ asse x : $\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x - \frac{15}{8} = 0$

$x^2 - 7x - \frac{15}{4} = 0 \quad x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49+15}}{2} =$

$= \frac{7 \pm 8}{2} = \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{15}{2} \end{cases}$




g) $6\cos x + 12 \operatorname{sen} x \cos x = 0 \iff 6\cos x(1 + 2\operatorname{sen} x) = 0 \iff$

$\iff \cos x = 0 \ \underline{o} \ 1 + 2\operatorname{sen} x = 0 \iff \cos x = 0 \ \underline{o} \ \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$

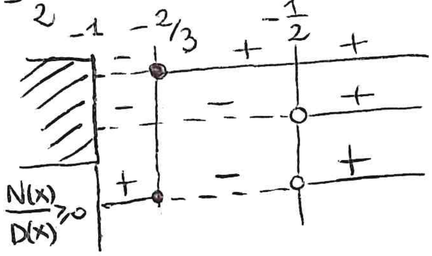
$\iff \left(x = \frac{\pi}{2} \text{ o } x = \frac{3}{2}\pi\right) \ \underline{o} \ \left(x = \frac{7}{6}\pi \text{ o } x = \frac{11}{6}\pi\right)$

h) è una DIS.ne FRATTA : C.E. $3x+3>0 \quad x>-1$
$2x+1 \neq 0 \quad x \neq -\frac{1}{2}$

$N(x) = \log(3x+3) \geq 0 \quad 3x+3 \geq 1 \quad 3x \geq -2 \quad x \geq -\frac{2}{3}$

$D(x) = 2x+1 > 0 \qquad x > -\frac{1}{2}$

OSS. $-\frac{2}{3} < -\frac{1}{2} \iff \frac{2}{3} > \frac{1}{2} \iff 4 > 3$ vero.



ElMat_18/7/18 - 6

SOL.$^{ne}$ $x \in ]-1, -\frac{2}{3}[ \cup ]-\frac{1}{2}, +\infty[$ (Dobbiamo considerare $\frac{N(x)}{D(x)} > 0$)

i) $f(x) = \log(x-2)$ $\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : x-2 > 0\} = ]2, +\infty[$

grafico $y = \log(x-2)$ si tratta del grafico del logaritmo ($y = \log x$) spostato a destra di 2

$\cap$ asse y: $\emptyset$

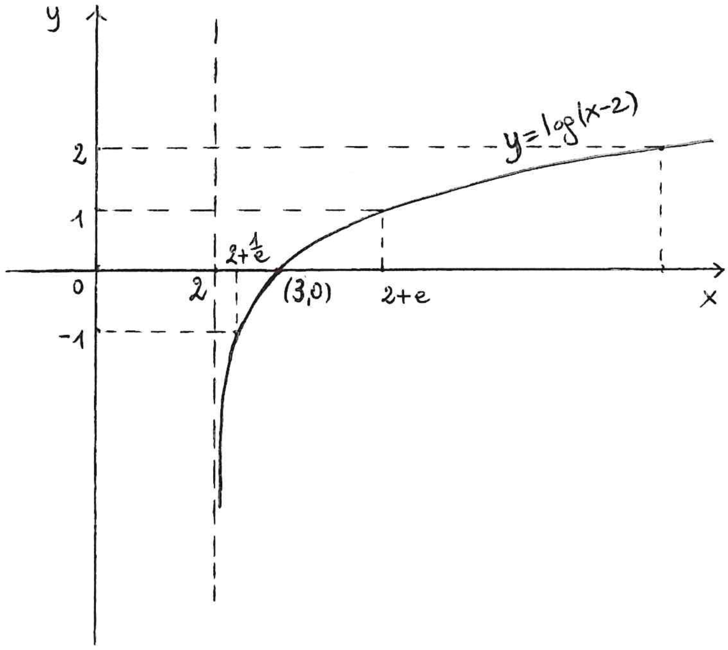
$\cap$ asse x: $\log(x-2) = 0$ $x-2 = 1$ $x = 3$

(3,0)

asintoto verticale $x = 2$

passa per $(2+\frac{1}{e}, -1)$ $(3,0)$ $(2+e, 1)$ $(2+e^2, 2)$

(oss. $\log e^x = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$)

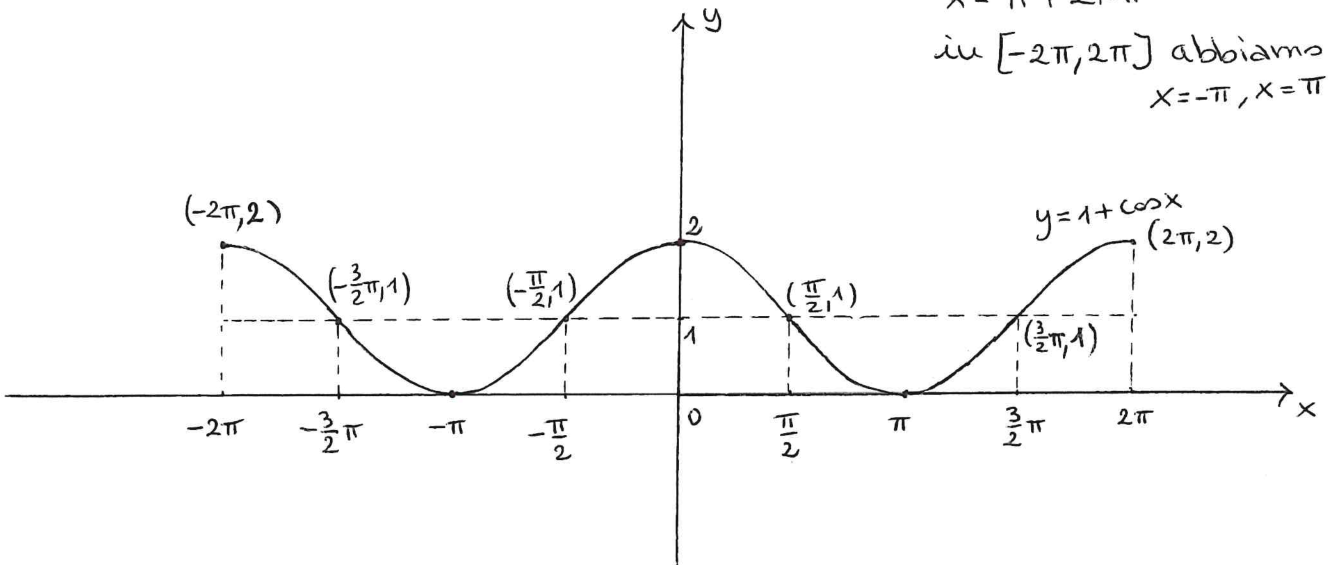



$g(x) = 1 + \cos x$ $\operatorname{dom} g = \mathbb{R}$

eq.$^{ne}$ del grafico $y = 1 + \cos x$ si tratta del grafico del coseno ($y = \cos x$) spostato in alto di 1. $\cap$ asse y: (0,2) $\cap$ asse x: $1 + \cos x = 0$ $\cos x = -1$

$x = \pi + 2k\pi$

in $[-2\pi, 2\pi]$ abbiamo $x = -\pi$, $x = \pi$



ElMat - 18/7/18 - 7

ES1) $\underline{P(x)}$ $\sqrt{x-1} \le 3 \iff \begin{cases} x-1 \ge 0 & (C.E.) \\ 3>0 & (\sqrt{A(x)} \le K \text{ non ha sol.}^{ne} \text{ se } K<0) \\ x-1 \le 9 & ((\sqrt{A(x)})^2 \le K^2) \end{cases}$

$\begin{cases} x \ge 1 \\ \text{sempre vero} \\ x \le 10 \end{cases}$ Sol.$^{ni}$ $x \in [1,10]$ $P(x):\ x \in [1,10]$

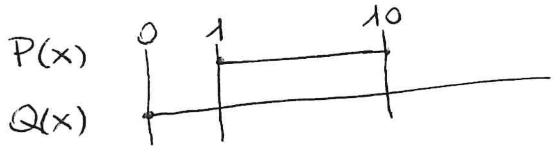
$\underline{Q(x)}$ $e^x \ge 1 \iff x \in [0,+\infty[$

Proposizione: $\forall x \in \mathbb{R}\quad P(x) \Rightarrow Q(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}\quad x \in [1,10] \Rightarrow x \in [0,+\infty[$

<u>VERA</u> perché se un numero $x$ è tra 1 e 10 $\Rightarrow$ a maggior ragione il numero $x$ è $\ge 0$

come si vede dal grafico in tutti gli x in cui P(x) è VERA è vera anche Q(x)

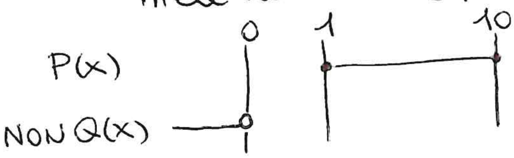



NEGAZIONE TEORICA $\exists x \in \mathbb{R}:\ \text{NON}(P(x) \Rightarrow Q(x))$

$\exists x \in \mathbb{R}:\ P(x)\ \underline{e}\ \text{NON}\,Q(x)$

NEGAZIONE $\exists x \in \mathbb{R}:\ x \in [1,10]\ \underline{e}\ x \in ]-\infty,0[$

<u>FALSA</u>: non esiste nessun numero che sia contemporaneamente nell'intervallo $[1,10]$ e che sia $<0$.




$P(x) \cap (\text{NON}\,Q(x)) = \emptyset$.

ES.2) eq.$^{ne}$ di un ELLISSE $\dfrac{(x-x_c)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1$

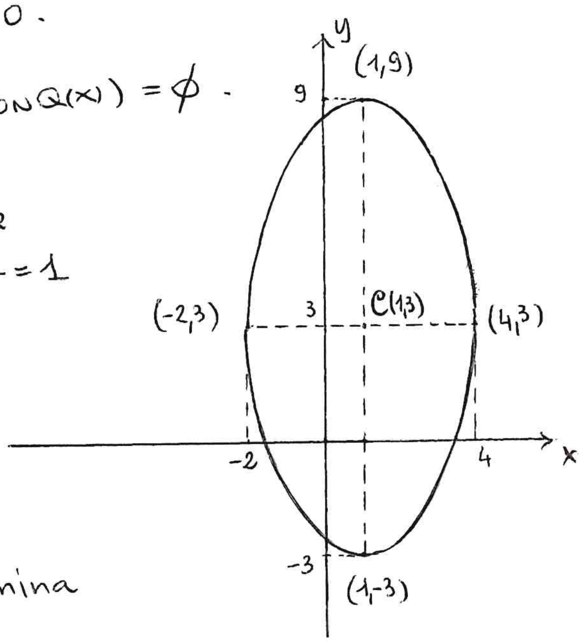
Dalle ipotesi $\boxed{x_c = 1}$ $\boxed{y_c = 3x_c = 3}$

$b = 6$

$\Rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{a^2} + \dfrac{(y-3)^2}{36} = 1$

Imponendo il passaggio per $(0, 3-4\sqrt{2})$ si determina a (ricordiamo che $a>0$, $b>0$)

$\dfrac{(0-1)^2}{a^2} + \dfrac{(\cancel{3}-4\sqrt{2}-\cancel{3})^2}{36} = 1 \qquad \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{\cancel{32}^{\,8}}{\cancel{36}_{\,9}} = 1 \qquad \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{9} \qquad a^2 = 9 \quad a = \pm 3 \rightarrow \boxed{a=3}$




<u>RISPOSTA</u>: $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-3)^2}{36} = 1$ ellisse di $C(1,3)$ $a=3$ $b=6$

ES. 4) <u>1° tratto</u>: $y = \log(x-2)$ è già stato disegnato a pag. 6

$y = -\log(x-2)$ è il simmetrico rispetto all'asse x

asintoto verticale $x=2$, passa per $(2+\frac{1}{e}, 1)$ $(3,0)$ $(\underset{\approx 4{,}7}{2+e}, -1)$ $(2+e^2, -2)$

$f(\underset{\approx 3{,}65}{\sqrt{e}+2}) = -\log(\sqrt{e}+2-2) = -\log\sqrt{e} = -\log e^{1/2} = -\frac{1}{2}\underbrace{\log e}_{=1} = -\frac{1}{2}$

<u>2° tratto</u> $y = -2+\sqrt{x+6}$ è il grafico della radice $(y=\sqrt{x})$ spostato a sinistra di 6 e in basso di 2. $\cap$ asse x: $(-2,0)$

passa per $(-6,-2)$ $(-5,-1)$ $(-2,0)$.

Poi $y = |-2+\sqrt{x+6}|$ ribalta rispetto all'asse y la parte di grafico con $y<0$ (cioè per $x \in [-6,-2]$).

Passa per $(-6,2)$ $(-5,1)$ $(-2,0)$ $(0, \sqrt{6}-2)$.

$f(2) = |-2+\sqrt{2+6}| = |-2+\sqrt{8}| = |-2+2\sqrt{2}| = 2\sqrt{2}-2 \approx 0{,}8$

non ci sono asintoti