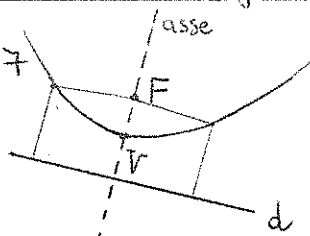


4^a lezione, 2 ottobre 2017**PARABOLE**

Def. Assegnati un punto del piano F (detto Fuoco) e una retta d (detta DIRETTRICE) si chiama PARABOLA la curva che si ottiene come luogo geometrico dei punti equidistanti da F e da d . La retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice si chiama ASSE della parabola. La parabola risulta SIMMETRICA rispetto al suo asse.

Noi consideriamo parabole con ASSE parallelo all'asse y .
Nei corsi di ANALISI 1 e 2 può capitare di incontrare una parabola con asse // asse x .

L'equazione di una PARABOLA con ASSE // asse y è data da
 $y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ (se $a = 0$ l'eq. fornisce una retta)

Una parabola si disegna calcolando il suo VERTICE che è l'unico punto della parabola che appartiene all'asse. Le coordinate del vertice sono date da

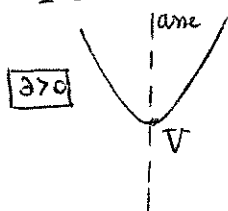
$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

$\overset{\text{''}}{\underset{x_v}{- \frac{b}{2a}}} \quad \quad \quad \overset{\text{''}}{\underset{y_v}{- \frac{\Delta}{4a}}}$

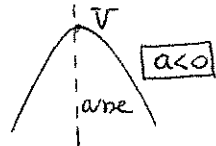
anche se

per calcolare y_v spesso è più semplice utilizzare l'eq. $y_v = ax_v^2 + bx_v + c$.
Oltre al vertice si calcolano i punti di intersezione con i due assi (con l'asse x solo se ce ne sono) ^{pag. 2} e si tiene conto di

1- Se $a > 0$ la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto



mentre se $a < 0$ ha la concavità rivolta verso il basso



2. La parabola è perfettamente simmetrica rispetto al suo asse (che è la retta VERTICALE passante per il VERTICE di equazione $x=x_v$)

- 2 -

2/10/17

⊕ L'asse y: $(0, c)$ se esiste
 L'asse x: $(x, 0)$ con V dell'eq. di 2° grado $ax^2+bx+c=0$ se ce ne sono.

ESEMPIO - $y = -x^2 + 4x - 3$ parabola rivolta verso il basso ($a = -1 < 0$)

di VERTICE $V = (2, 1)$ $x_v = \frac{-4}{-2} = 2$ $y_v = -4 + 8 - 3 = 1$

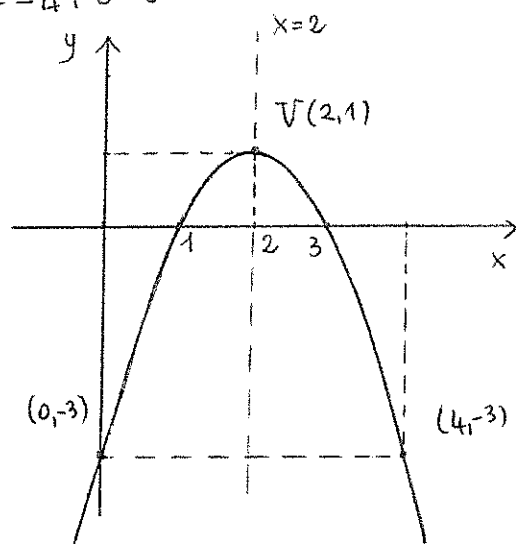
asse di simmetria $x = 2$

L'asse y $(0, -3)$

L'asse x

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{1}}{1} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

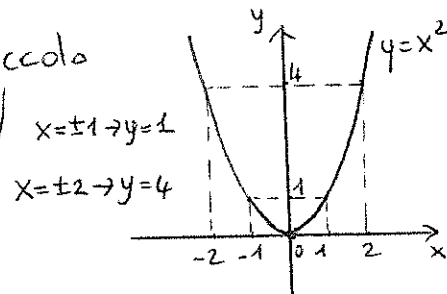


OSSERVAZIONE 1 - La parabola $y = x^2$ è la parabola di $V(0, 0)$

riolta verso l'alto con asse di simmetria coincidente con l'asse y e $a = 1$; viene detta PARABOLA di base. Il numero

$|a|$ = APERTURA della parabola; più $|a|$ è piccolo

più la parabola è larga mentre se $|a|$ è grande, allora la parabola risulta stretta.

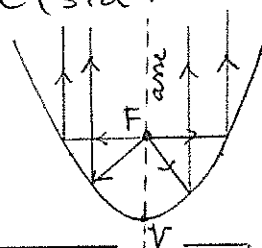


In particolare se $|a| < 1$, allora la parabola è più larga di $y = x^2$, mentre se $|a| > 1$ è più stretta. Se $|a| = 1$

le due parabole hanno la stessa apertura: ad es. la parabola dell'es. precedente $y = -x^2 + 4x - 3$ ha la stessa apertura di $y = x^2$ quindi è la stessa parabola semplicemente capovolta e traslata in modo che il suo vertice coincida con $(2, 1)$.

Vedremo più avanti che dalla parabola di base è possibile ricostruire tutte le altre parabole con una formula che tiene conto delle trasformazioni effettuate per passare dall'una all'altra.

OSSERVAZIONE 2 - La parabola ha l'importante proprietà che tutti i RAGGI emessi dal FUOCO (siano essi LUMINOSI, SEGNALI SATELLITARI, RADIO, TELEVISIVI), vengono riflessi dalla parabola come paralleli all'asse, quindi perfettamente dritti. Per questo la parabola è utilizzata nei FANALI (con lampadina posta nel fuoco) e nelle ANTENNE PARABOLICHE (sia in RICEZIONE che in TRASMISSIONE).



METODO delle PARABOLE per la SOLUZIONE delle DISEQUAZIONI di SECONDO GRADO

ES. 1) $x - 3x^2 + 2 > 0$ riordiniamo l'equazione e facciamo in modo che il coeff. di x^2 risulti positivo: $3x^2 - x - 2 < 0$

Consideriamo la PARABOLA associata alla disequazione:

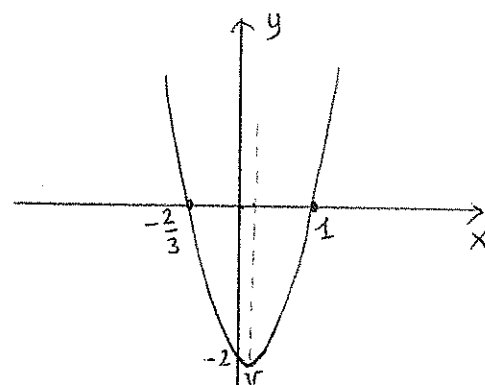
$$y = 3x^2 - x - 2$$

La DISEQ.^{ue} $3x^2 - x - 2 < 0 \iff$ per quali $x \in \mathbb{R}$ $y_{\text{par}} < 0$

La parabola è rivolta verso l'alto (e saremo sempre in questo caso se il coeff. di x^2 è positivo) e cerchiamo le

razze x ossia

$$y = 0 \Rightarrow 3x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$



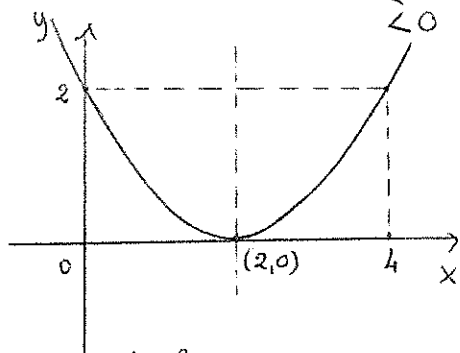
Non serve calcolare il VERTICE per fare un disegno approssimativo (anche se sicuramente $x_v = \frac{1}{6}$, a metà tra $-\frac{2}{3}$ e 1)

del grafico della parabola. Dal disegno si vede subito che $y < 0$ se $x \in]-\frac{2}{3}, 1[$, quindi

-4-
2/10/17

SOL.^{ui} DIS.^{ue} $x \in]-\frac{2}{3}, 1[$

ES.2) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 \geq 0$
 > 0
 ≤ 0
 < 0



parabola associata $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$
verso l'alto

Nonex $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0 \quad x_1 = 2$

$\Rightarrow$ la parabola è tangente all'asse x in $(2, 0)$
che risulta anche essere il VERTICE

Dal disegno risulta pertanto

$\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$	SOL. ^{ui} $\forall x$
$> 0 \Leftrightarrow y > 0$	SOL. ^{ui} $\forall x \neq 2$
$\leq 0 \Leftrightarrow y \leq 0$	SOL. ^{ui} $x = 2$
$< 0 \Leftrightarrow y < 0$	SOL. ^{ui} nessuna

ES.3) $4x^2 - x + \frac{1}{3} \geq 0$
 > 0
 ≤ 0
 < 0

parabola associata $y = 4x^2 - x + \frac{1}{3}$

verso l'alto

Nonex $4x^2 - x + \frac{1}{3} = 0 \quad \Delta < 0$ nessuna intersezione con l'asse x

$\Rightarrow$ la parabola si trova tutta al di sopra dell'asse x ($V = (\frac{1}{8}, \frac{13}{48})$)

Dal disegno risulta pertanto

$4x^2 - x + \frac{1}{3} \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$	SOL. ^{ui} $\forall x$
$> 0 \Leftrightarrow y > 0$	SOL. ^{ui} $\forall x$
$\leq 0 \Leftrightarrow y \leq 0$	SOL. ^{ui} nessuna
$< 0 \Leftrightarrow y < 0$	SOL. ^{ui} nessuna

PARABOLE con asse // asse x

equazione $x = ay^2 + by + c \quad V(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a})$

$a > 0$

$a < 0$



Nonex $(c, 0)$ Nonex $y : (0, y)$ con y sol.^{ue} di

$ay^2 + by + c = 0$ se ce ne sono

asse di simmetria // asse x di eq.^{ue} $y = y_v$.

PROPOSIZIONI e PREDICATI

Definizione Chiamiamo **PROPOSIZIONE** ogni frase di senso compiuto che dia delle informazioni e di cui si possa stabilire se è vera o falsa.

Esempi. 1) "Cosa mangerai domani?" Non è una proposizione

2) "Carlo è alto 1,70 m" è una proposizione (vera o falsa)

Si possono unire due o più proposizioni utilizzando dei connettivi logici:

e (si indica anche con $\wedge$): date due proposizioni A, B la proposizione $A \wedge B$ afferma che A e B sono vere contemporaneamente

esempio $A = \text{"Carlo è alto 1,70 m"}$

$B = \text{"Carlo ha gli occhi verdi"}$

$A \wedge B = \text{"Carlo è alto 1,70 m e ha gli occhi verdi"}$
le due affermazioni
questa proposizione risulta vera solo se sono entrambe vere.

o (si indica anche con $\vee$): date due proposizioni A, B la proposizione $A \vee B$ afferma che almeno una delle due proposizioni è vera

esempio $A \vee B = \text{"Carlo è alto 1,70 m oppure ha gli occhi verdi"}$

questa proposizione è vera se almeno una delle due affermazioni è vera (o anche se lo sono entrambe)

NON serve per negare una proposizione

esempio $\text{NON } A = \text{"Carlo non è alto 1,70 m"}$

$C = \text{"x > 1"}$ $\text{NON } C = \text{"x \leq 1"}$ $D = \text{"x = 0"}$ $\text{NON } D = \text{"x \neq 0"}$

Se neghiamo una proposizione costruita a partire da due proposizioni A e B tramite i connettivi $\wedge, \vee$ valgono le seguenti regole

-6-
2/10/17

$$\begin{aligned} \text{NON}(A \wedge B) &\Leftrightarrow \text{NON } A \vee \text{NON } B \\ \text{NON}(A \vee B) &\Leftrightarrow \text{NON } A \wedge \text{NON } B \end{aligned}$$

ESEMPIO - $\text{NON}(\text{"Carlo è alto } 1,70\text{m} \wedge \text{Carlo ha gli occhi verdi"})$
 $\Downarrow$
 $\text{Carlo non è alto } 1,70 \vee \text{Carlo non ha gli occhi verdi}$

(se neghiamo che due condizioni siano contemporaneamente verificate vuol dire che stiamo affermando che almeno una delle due non è verificata).

$\text{NON}(\text{"Carlo è alto } 1,70\text{m} \vee \text{Carlo ha gli occhi verdi"})$

$\Downarrow$
 $\text{Carlo non è alto } 1,70\text{m} \wedge \text{Carlo non ha gli occhi verdi}$
(se neghiamo che almeno una tra due condizioni sia vera stiamo affermando che nessuna delle due è verificata).

Naturalmente due negazioni affermano $\boxed{\text{NON}(\text{NON } A) \Leftrightarrow A}$

Definizione Chiamiamo **PREDICATO** ogni frase contenente una o più variabili che diventa una proposizione quando viene specificato il valore delle variabili.

Esempio $I = \{\text{studenti di questa classe}\}$

$x \in I$ è uno studente

$P(x) = \text{"Lo studente } x \text{ è alto } 1,70\text{m"}$

Quando si sceglie uno studente preciso $P(\text{studente}_{\text{scelto}})$ diventa una proposizione (vera o falsa).

Un altro modo per trasformare un predicato in una proposizione è utilizzare un QUANTIFICATORE.

I quantificatori sono:

$\forall$ che significa QUALUNQUE, PER OGNI

$\exists$ " " ESISTE almeno uno

$\exists!$ " " ESISTE un solo

Esempio - $\forall x \in I: P(x)$ è una proposizione (sicuramente falsa!) che afferma che "tutti gli studenti di questa classe sono alti 1,70 m"

mentre $\exists x \in I: P(x)$ è una proposizione (probabilmente vera) che afferma che "esiste almeno uno studente in questa classe alto 1,70 m".

Nelle NEGAZIONI i due quantificatori si scambiano tra loro

$$\text{NON} (\forall x P(x)) \Leftrightarrow \exists x : \text{NON } P(x)$$

Dire che non è vero che tutti gli studenti sono alti 1,70 m significa affermare che ne esiste almeno uno di altezza diversa.

$$\text{NON} (\exists x P(x)) \Leftrightarrow \forall x : \text{NON } P(x)$$

Dire che non è vero che esiste almeno uno studente alto 1,70 m significa affermare che tutti hanno un'altezza diversa da 1,70 m.

Esempio - $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 \neq 0$ VERA perché $x^2 + 1 \geq 1 > 0 \quad \forall x$

(Negazione: $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0$ FALSA non esiste nessun x $\Delta < 0$)

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 1 \neq 0$ FALSA: infatti la sua NEGAZIONE

$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0$ è VERA (esistono sia $x = -1$ che $x = 1$)

PER NEGARE una AFFERMAZIONE basta produrre un CONTROESEMPIO.
(NEBASTA UNO SOLO)

Esempio - ① $\exists x \in \mathbb{R} : \frac{9}{2}x - 8 > 5 - \frac{1}{2}x \Leftrightarrow x > 3$

-8-
2/10/17

Si afferma che "esiste almeno un numero $x > 3$ che verifica la disequazione"

Dis.^{ue} $5x > 13 \quad x > \frac{13}{5} \rightarrow$ La dis.^{ue} è verificata $\forall x > \frac{13}{5} \quad (\frac{13}{5} < 3)$

$\Rightarrow$ l'affermazione è vera in quanto tutti i numeri $x > 3$ verificano la disequazione.

② $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : y > x$ VERA $\forall x \in \mathbb{R}$ basta considerare $y = x + 1$

Afferma che per ogni numero reale ne esiste uno più grande.

Se INVERTIAMO L'ORDINE dei QUANTIFICATORI il significato può cambiare;

$\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : y > x$ FALSA perché afferma che esiste un numero reale più grande di tutti gli altri (nella proposizione precedente y dipende da x e cambia con x).

Allora la negazione di questa proposizione

$\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} : y \leq x$ è VERA (è la 1^a proposizione con i nomi scambiati ed è sempre il PRINCIPIO di NON LIMITATEZZA dei numeri reali).

$\Rightarrow$ si scrive $A \Rightarrow B$ e si legge da A segue B
oppure A implica B

oppure se A è vera, allora anche B è vera

SIGNIFICA che se la proposizione A è VERA, allora la proposizione B è sicuramente VERA, mentre se A è FALSA B può essere indifferentemente sia vera sia falsa.

Esempio $A = \text{"tu sei la mia mamma"}$

-9-

$B = \text{"tu ti chiami Paola"}$

2/10/17

$A \Rightarrow B = \text{"se tu sei la mia mamma, allora tu ti chiami Paola"}$

Se A è vera vuol dire che tu sei la mia mamma e sicuramente ti chiami Paola. Se invece A è FALSA, tu non sei la mia mamma e io non so come ti chiami, potresti non chiamarti Paola oppure chiamarti lo stesso Paola pur non essendo la mia mamma.

La proposizione $A \Rightarrow B$ è FALSA SOLO SE A è VERA e B è FALSA

A	B	$A \Rightarrow B$
-----	-----	-------------------

V	V	V
---	---	---

V	F	F
---	---	---

F	V	V
---	---	---

F	F	V
---	---	---

Risulta che

$$[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [\text{NON } A \text{ o } B]$$

EQUIVALE

infatti se A è FALSA allora $\text{NON } A$ è VERA e B può essere indifferentemente VERA o FALSA; invece se A è VERA allora $\text{NON } A$ è FALSA e B deve essere VERA.

ESEMPIO - $A \Rightarrow B$ "Se tu sei la mia mamma, allora tu ti chiami Paola"



$\text{NON } A \text{ o } B$ "tu non sei la mia mamma o tu ti chiami Paola"

ESEMPIO - $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$ VERO

che EQUIVALE a $\forall x \quad (x=0) \text{ o } (x^2 > 0)$ che è VERA in quanto

per ogni $x \in \mathbb{R}$ è $x=0$ o $x \neq 0$ cioè $x=0 \text{ o } x^2 > 0$

Possiamo NEGARE $A \Rightarrow B$:

-10-

2/10/17

$$\boxed{[\text{NON}(A \Rightarrow B)] \Leftrightarrow [\text{NON}(\text{NON}(A \wedge \text{NON} B))] \Leftrightarrow A \wedge \text{NON} B}$$

Di nuovo, se voglio dimostrare che NON E' VERO CHE da A segue B , mi basta produrre UN CONTROESEMPIO in cui non vale, ossia in cui A sia VERA e B FALSA.

Esempio - $\forall x \quad x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$ FALSA[⊗] (anche i numeri $x \leq -1$ hanno $x^2 \geq 1$)
NEGAZIONE $\exists x : x^2 \geq 1 \wedge x < 1$ VERA per $x \in]-\infty, -1]$

⊗ E' il VICEVERSA $\forall x \quad x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1$ ad essere VERO

Esempio - Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : x^4 - 3x^2 - 4 < 0\}$. Stabilite se sono vere le seguenti proposizioni:

- 1) $\forall x \quad x \in A \Rightarrow x < 3$
- 2) $\forall x \quad x \in A \Rightarrow -2 < x < 2$
- 3) $\forall x \quad x \in A \Rightarrow x \in B$ dove $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x < 0\}$

Dobbiamo determinare A :

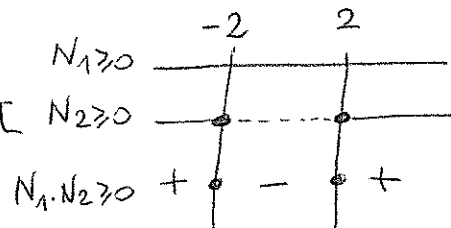
Poniamo $t = x^2$ ottenendo $t^2 - 3t - 4 < 0$ decomponiamo il polinomio di 2° grado in t : $t^2 - 3t - 4 = 0 \quad t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \rightarrow t_1 = -1, t_2 = 4$

da cui $t^2 - 3t - 4 = (t+1)(t-4)$ - Allora

$x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2+1)(x^2-4) < 0$ è una DIS. PRODOTTO

$$N_1(x) = x^2 + 1 \geq 0 \quad \forall x$$

$$N_2(x) = x^2 - 4 \geq 0 \quad x^2 \geq 4 \quad x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$$



$$\text{Sol.}^{\text{ue}} A =]-2, 2[$$

1) $\forall x \quad x \in A \Rightarrow x < 3$ è VERA : ogni elemento di A è < 3 ⊗

2) $\forall x \quad x \in A \Rightarrow -2 < x < 2$ è VERA : sono esattamente tutte e sole le soluzioni di A

⊗ invece il VICEVERSA $x < 3 \Rightarrow x \in A$ è FALSO

3) $B =]0, 2[\quad \forall x \quad x \in A \Rightarrow x \in B$ è FALSA - Infatti la

NEGAZIONE è $\exists x \quad x \in A \wedge x \notin B$ VERA: tutti gli $x \in]-2, 0]$ appartengono ad A ma $\notin B$.

OSSERVAZIONE - $\forall x \quad x \in A \Rightarrow x \in B$ è la definizione di $A \subseteq B$,

cioè dice che A è un sottoinsieme di B , ma

-11-
2/10/17

$] -2, 2[\subseteq] 0, 2[$ è FALSO.

OSSERVAZIONE - Come già ottenuto prima

$$\text{NON } (A \subseteq B) \Leftrightarrow \exists x : x \in A \text{ e } x \notin B.$$

OSSERVAZIONE - Anche 1) $\forall x \ x \in A \Rightarrow x < 3$ si può interpretare

come $A =] -2, 2[\subseteq] -\infty, 3[$ che è VERO

e 2) come $A =] -2, 2[\subseteq] -2, 2[$ che è VERO.

OSSERVAZIONE - Quando non si è sicuri se una proposizione sia VERA o FALSA conviene ragionare contemporaneamente con la proposizione e con la sua negazione. Ad esempio

$$1) \forall x \ x \in A =] -2, 2[\Rightarrow x < 3$$

ha come negazione $\exists x : x \in] -2, 2[\text{ e } x \geq 3$ che è ovviamente FALSA.

Di qui deduciamo che la proposizione di partenza è VERA
e, se non ne eravamo convinti, ^{è bene} capirne anche il perché.

OSSERVAZIONE - Vogliamo negare la propos $\exists! x : P(x)$.

Osserviamo che se non è vero che ESISTE un SOLO x che verifica $P(x)$ possono presentarsi due situazioni: non esiste nessun x che rende vero $P(x)$ oppure esistono almeno due valori distinti di x che rendono vero $P(x)$. Quindi possiamo

scrivere

$$\text{NON } (\exists! x : P(x)) \Leftrightarrow (\forall x \text{ NON } P(x)) \cup (\exists x_1, x_2 \text{ con } x_1 \neq x_2 : P(x_1) \text{ e } P(x_2))$$

ES. $\exists! x : x^2 = 1$ FALSO

NEGAZIONE $(\forall x \ x^2 \neq 1) \cup (\exists x_1, x_2 \text{ con } x_1 \neq x_2 : x_1^2 = 1 \text{ e } x_2^2 = 1)$ La negazione è VERA

↓
è FALSA

↓
è VERA $x_1 = -1$
 $x_2 = 1$