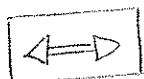


5<sup>a</sup> lezione, 5 ottobre 2017... ancora su **PROPOSIZIONI e PREDICATI**

BIIMPLICA

 $(A \Leftrightarrow B)$  SIGNIFICA  $(A \Rightarrow B) \text{ e } (B \Rightarrow A)$ si dice che  $A \text{ e } B$  sono EQUIVALENTI perché sono sempre contemporaneamente VERE o FALSEEsempi Abbiamo visto che  $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \cdot b \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \text{ e } b \neq 0$ o anche che  $\forall x \quad x \neq 0 \Leftrightarrow x^2 > 0$ 

Disolito

consiste nel

 $\forall$  la verifica  $\forall$  dimostrare separatamente  $A \Rightarrow B$  e poi  $B \Rightarrow A$ , così come per dimostrare che due insiemi  $A \text{ e } B$  sono uguali $A = B$  si dimostra che  $A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A$ .Invece  $\forall x \quad x^2 \geq \frac{9}{4} \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$  è FALSA in quanto $x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow x^2 \geq \frac{9}{4}$  è VERA, mentre  $x^2 \geq \frac{9}{4} \Rightarrow x \geq \frac{3}{2}$  è FALSAvisto che anche tutti gli  $x \in ]-\infty, -\frac{3}{2}]$  sono tali che  $x^2 \geq \frac{9}{4}$ .Esempio - Siano  $A = ]-2, 2[$  e  $B = ]0, 2[$ ; stabilire se è vero che $\forall x \quad x \in A \Leftrightarrow x \in B$ .È falso perché  $x \in B \Rightarrow x \in A$  è VERA, ma  $x \in A \Rightarrow x \in B$  è

FALSA, come già dimostrato la lezione scorsa.

Si osservi che  $\forall x \quad x \in A \Leftrightarrow x \in B$  è la definizione diUGUAGLIANZA tra due insiemi e significa che  $A = B$ , quindiin questo caso è FALSO perché vale solo  $B \subseteq A$ .

1) Si dimostra che  $[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [\text{NON } B \Rightarrow \text{NON } A]$

Infatti  $[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [\text{NON } A \vee B]$

e  $[\text{NON } B \Rightarrow \text{NON } A] \Leftrightarrow [\text{NON}(\text{NON } B) \vee \text{NON } A] \Leftrightarrow [B \vee \text{NON } A] \Leftrightarrow [\text{NON } A \vee B]$ .

Questo è il PRINCIPIO della DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO:

Se si vuole DIMOSTRARE che IPOTESI  $\Rightarrow$  TESI, si può provare a NEGARE LA TESI e DIMOSTRARE CHE L'IPOTESI RISULTA FALSA, da cui si deduce che SE L'IPOTESI è VERA, allora LA TESI è VERA e quindi IL TEOREMA è DIMOSTRATO.

2) Se  $[A \Rightarrow B]$  si dice che  $A$  è CONDIZIONE SUFFICIENTE per  $B$  perché per dimostrare che  $B$  è VERA è SUFFICIENTE dimostrare che  $A$  è VERA, visto che poi da  $A$  segue  $B$ . Quindi  $A$  è SUFFICIENTE per OTTENERE  $B$ .

Esempi ① Visto che sappiamo che  $\forall x \quad x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1$ , se dobbiamo dimostrare che  $x$  è tale che  $x^2 \geq 1$ , possiamo provare a dimostrare che  $x \geq 1$ . Se  $A = "x \geq 1"$  e  $B = "x^2 \geq 1"$  visto che  $A \Rightarrow B$  è VERA,  $A$  è condizione sufficiente per avere  $B$ .  
Ma ATTENZIONE!! se non si riesce a dimostrare che  $A$  è VERA, NON VUOL DIRE che  $B$  sia FALSA, non sappiamo nulla di  $B$  e dobbiamo ricominciare seguendo una strada diversa (potrebbe essere  $x^2 \geq 1$  con  $x \leq -1$ ).

⊙ Per chi conosce un po' di ANALISI MATEMATICA

-3-

5/10/17

se  $f(x)$  è una FUNZIONE e  $f'(x)$  è la sua DERIVATA

è noto che  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f(x)$  <sup>STRETTAMENTE</sup> CRESCENTE <sub>su I</sub>  
Intervallo

quindi avere la derivata  $f'(x) > 0$  è CONDIZIONE SUFFICIENTE AFFINCHÉ la funzione SIA STRETTAMENTE CRESCENTE.

Essendo molto più facile stabilire se  $f'(x) > 0$  che dimostrare che  $f(x)$  è STRETTAMENTE CRESCENTE si usa sempre questa proprietà. Tuttavia nel caso non risulti  $f'(x) > 0$  non si può concludere che  $f(x)$  non è strettam. crescente, può esserlo oppure non esserlo.

3) Se  $[A \Rightarrow B]$  si dice che B è CONDIZIONE NECESSARIA per A perché, visto che da A segue B, A non può ESSERE VERA se B non lo è, quindi è NECESSARIO CHE B sia VERA affinché A POSSA ESSERE VERA.

Ad esempio, se si vuole stabilire se A è VERA si può cominciare controllando B:

$B \rightarrow \text{VERA} \rightarrow A$  può essere VERA (ma può anche essere FALSA)  
 $\searrow$  FALSA  $\rightarrow A$  è FALSA.

Infatti se B è FALSA, lo è NECESSARIAMENTE anche A.

es. ⓪ Supponiamo di voler dimostrare <sup>che le</sup> soluzioni x di un certo problema verificano  $x \geq 1$ . Poiché  $\forall x \quad x \geq 1 \Rightarrow x > 0$ , possiamo intanto vedere se siamo capaci di dimostrare che le soluzioni verificano  $x > 0$ . Se dovessimo scoprire che

sono tutte NEGATIVE o NULLE, allora il teorema che volevamo dimostrare è sicuramente FALSO. Se dovessimo scoprire che certe sol.<sup>ui</sup> sono  $\leq 0$  e certe invece sono POSITIVE, dovremmo tentare di dimostrare un TEOREMA diverso capendo per quali sol.<sup>ui</sup> è vero che  $x \geq 1$ . Infine, se riusciamo a dimostrare che tutte le sol.<sup>ui</sup> sono POSITIVE, allora vuol dire che il NOSTRO TEOREMA PUO' ESSERE VERO, ma non lo abbiamo ancora dimostrato!!.

⊙ Sempre con le funzioni e le derivate è noto che se  $x_0$  è un PUNTO di MASSIMO o di MINIMO LOCALE di una funzione (con  $x_0$  interno all'intervallo o all'insieme su cui si sta lavorando) e  $f$  è derivabile in  $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$   
(Teorema di Fermat)

Quindi la condizione  $f'(x_0) = 0$  è NECESSARIA affinché  $x_0$  POSSA essere un p.to di max o minimo locale, ma non è SUFFICIENTE!! (cioè  $f'(x_0) = 0$  senza che  $x_0$  sia un punto di massimo o minimo locale può succedere che)

4) Si dimostra facilmente che

$$[(A \Rightarrow B) \text{ e } (B \Rightarrow C)] \Rightarrow [A \Rightarrow C]$$

(vale la proprietà TRANSITIVA) -

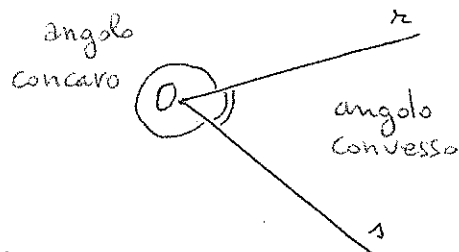
Quindi per dim. che da  $A$  segue  $C$  possiamo effettuare la dimostrazione in più passi, se così risulta più semplice.

5) Se  $[A \Leftrightarrow B]$  allora  $A$  è CONDIZIONE NECESSARIA e SUFFICIENTE per  $B$  e VICEVERSA. Quindi le due condizioni sono EQUIVALENTI e valgono contemporaneamente.

# ANGOLI e TRIGONOMETRIA

-5-  
5/10/17

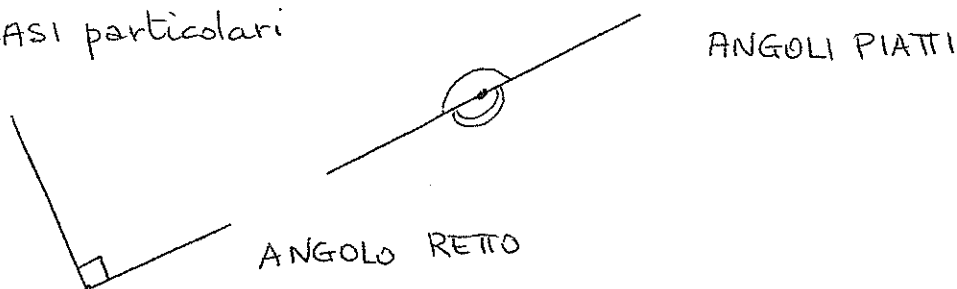
In un piano consideriamo due semirette  $r, s$  aventi la stessa origine  $O$ : queste semirette dividono il piano in due parti



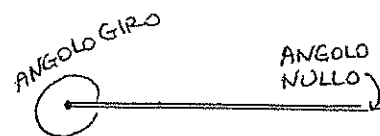
Si dice **ANGOLO** ciascuna delle due parti in cui il piano è diviso da due semirette aventi

l'origine in comune. Le semirette si dicono **LATI** dell'angolo, l'origine si dice **VERTICE** dell'angolo.

CASI particolari



Se le due semirette sono **SOVRAPPOSTE** generano l'angolo **NULLO** e l'angolo **GIRO**



- Un angolo si indica con lettere greche minuscole:  $\alpha, \beta$  ecc.

Si definisce **BISETTRICE** di un **ANGOLO** la semiretta di origine  $O$ , interna all'angolo, che divide l'angolo in due parti congruenti.

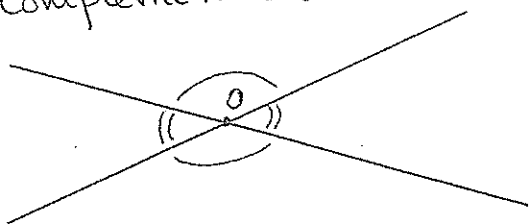
Due angoli si dicono **ESPLEMENTARI** se hanno per somma un angolo giro.

Due angoli si dicono **SUPPLEMENTARI** se hanno per somma un angolo piatto.

Due angoli si dicono **COMPLEMENTARI** se la loro somma è congruente ad un angolo retto.

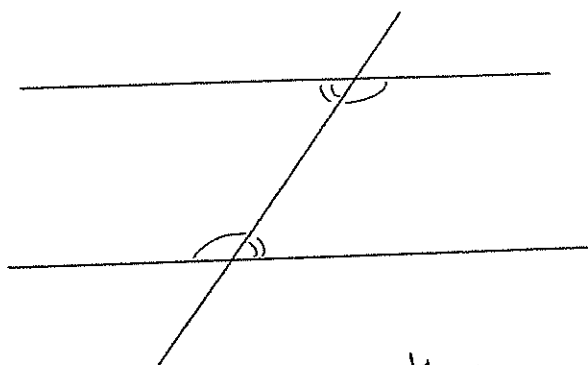
Nelle seguenti situazioni è utile

saper riconoscere gli angoli congruenti, supplementari e complementari:



ANGOLI OPPOSTI AL VERTICE  
gli angoli indicati allo stesso modo sono congruenti (gli angoli opposti al vertice sono congruenti).

Due angoli 1 e 2 sono SUPPLEMENTARI.

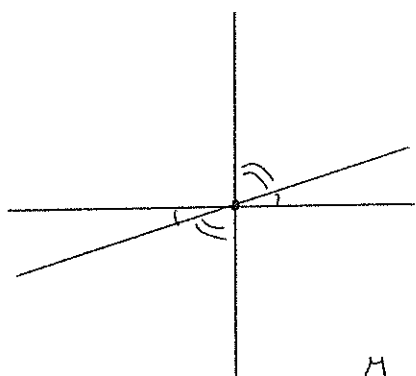


RETTE PARALLELE TAGLIATE DA UNA RETTA OBLIQUA

Gli angoli indicati allo stesso modo (detti alterni interni) sono congruenti.

Due angoli 1 e 2 (detti coniugati interni)

sono supplementari.



RETTE PERPENDICOLARI CON UNA RETTA OBLIQUA

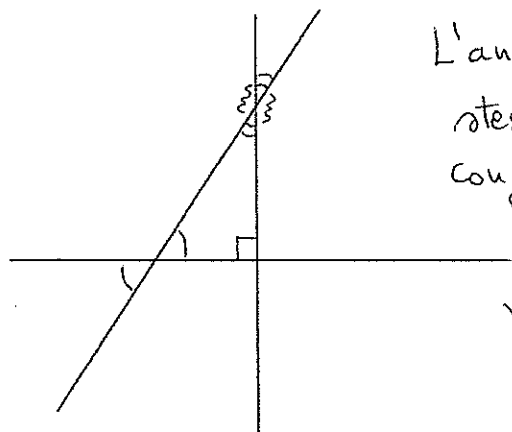
Gli angoli indicati allo stesso modo (opposti al vertice tra loro) sono congruenti.

Due angoli 1 e 2 sono complementari.

L'angolo 7 è retto, gli angoli indicati allo stesso modo (opposti al vertice tra loro) sono congruenti. Due angoli 1 e 2 sono

complementari. Due angoli

1 e 3 sono supplementari.



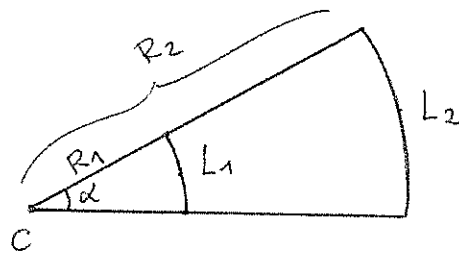
Gli ANGOLI si misurano principalmente in GRADI o in RADIANTI.

Il GRADO è la novantesima parte dell' ANGOLO RETTO (angolo retto =  $90^\circ$ , angolo piatto =  $180^\circ$ , angolo giro =  $360^\circ$ ).

La misura degli angoli in gradi è basata su un sistema sessagesimale e non su un sistema decimale e questo rende i calcoli complicati. Inoltre è molto poco pratica.

Per semplificare i calcoli e per altre buone ragioni a cui accenneremo, in Matematica si misurano gli angoli in RADIANTI.

Presi due SETTORI CIRCOLARI di raggi diversi  $R_1$  e  $R_2$ , ma concentrici e corrispondenti allo stesso angolo al centro si osserva che



$$R_1 : R_2 = L_1 : L_2 \Rightarrow \frac{L_1}{R_1} = \frac{L_2}{R_2}$$

Ne deduciamo che il rapporto  $\frac{L}{R} = \frac{\text{lunghezza dell'arco}}{\text{raggio}}$  è COSTANTE,

cioè NON VARIA al VARIARE della CIRCONFERENZA, ma

DIPENDE SOLO dall' ANGOLO AL CENTRO  $\alpha$ .

Il rapporto  $\frac{L}{R}$  viene assunto come misura, in RADIANTI, di  $\alpha$ :

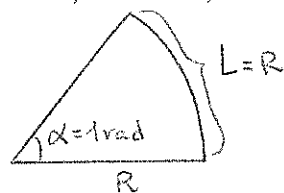
$$\alpha = \frac{L}{R} \text{ RADIANTI.}$$

Quindi

Def. (RADIANTE) Si dice ANGOLO di UN RADIANTE l'angolo 5/10/17 al centro di una circonferenza che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio (qualunque sia la circonferenza).

Tufatti

$$\text{Se } \alpha = 1 \rightarrow \frac{L}{R} = 1 \rightarrow L = R.$$



Se  $\alpha$  è misurato in RADIANTI, allora

$$\text{angolo giro} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$$

$$\text{angolo piatto} = \frac{\pi R}{R} = \pi$$

$$\text{angolo retto} = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot R}{R} = \frac{\pi}{2}.$$

Viceversa, la lunghezza di un arco è  $L = \alpha R$  con  $\alpha$  misurato in radianti e l'area del settore circolare è

$$A_{\text{settore}} = \frac{1}{2} L \cdot R = \frac{1}{2} \alpha R^2$$

(da cui per  $A_{\text{cerchio}} = \frac{1}{2} 2\pi R^2 = \pi R^2$  ben nota formula)

### DAI GRADI AI RADIANTI e Viceversa

$$360^\circ : 2\pi = \alpha^\circ : \alpha_{\text{RAD}}$$

dove  $\alpha^\circ$  è la misura in gradi di  $\alpha$   
mentre  $\alpha_{\text{RAD}}$  è la misura  
radianti di  $\alpha$

$$\Rightarrow \alpha_{\text{rad}} = \frac{2\pi}{360} \alpha^\circ = \frac{\pi}{180} \alpha^\circ \quad \text{e} \quad \alpha^\circ = \frac{180}{\pi} \alpha_{\text{rad}}$$

Ad es.  $\alpha = 45^\circ$  corrisponde a  $\alpha_{\text{rad}} = \frac{\pi}{180} \cdot 45 = \frac{\pi}{4}$  cioè  
esattamente metà di un angolo retto

$$\alpha = \frac{3}{4}\pi \text{ (radianti)} \text{ corrisponde a } \alpha = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{3}{4} \pi = 135^\circ$$

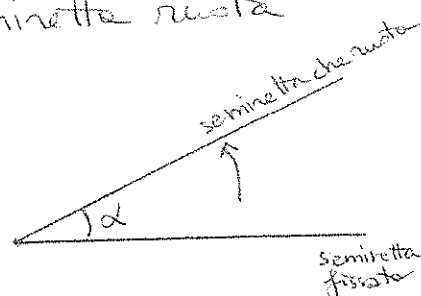
$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi \text{ (angolo piatto)}$$

( $\frac{3}{4}$  di un angolo  
piatto)

$$\alpha = 1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi} \approx 57,3^\circ$$

-9-  
5/10/17

Gli ANGOLI si MISURANO in VERSO ANTIORARIO fissando una delle due semirette orizzontale verso destra e misurando l'angolo mentre la seconda semiretta ruota in verso antiorario.



Risulta molto comodo fissare la 1<sup>a</sup> semiretta coincidente con il semiasse positivo delle x e misurare gli angoli (in verso antiorario) sulla CIRCONFERENZA GONIOMETRICA che è la circonferenza di  $C(0,0)$  e  $R=1$ . La circonferenza ha equazione  $x^2 + y^2 = 1$  e avendo il raggio  $R=1$ , risulta che l'angolo misurato in radianti è  $\alpha = L$ . L'angolo di 1 rad corrisponde ad un arco lungo  $L=1$ .

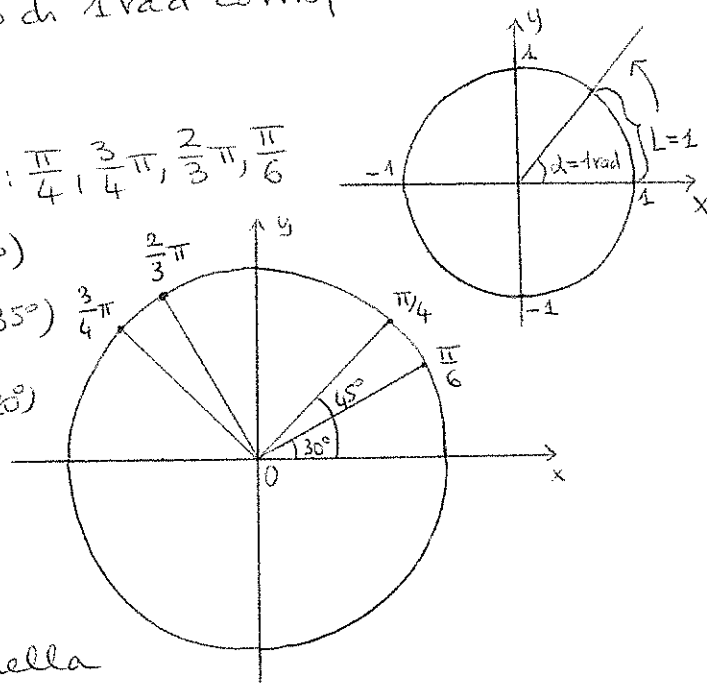
Disegniamo i seguenti angoli:  $\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{\pi}{6}$

$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}$  angolo piatto (in gradi  $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$ )

$\frac{3}{4}\pi = 3 \cdot \frac{\pi}{4} = \text{tre volte } \frac{1}{4} \text{ angolo piatto } (135^\circ)$

$\frac{2}{3}\pi = 2 \cdot \frac{\pi}{3} = 2 \text{ volte } \frac{1}{3} \text{ angolo piatto } (120^\circ)$

$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{6} \text{ angolo piatto } (30^\circ)$

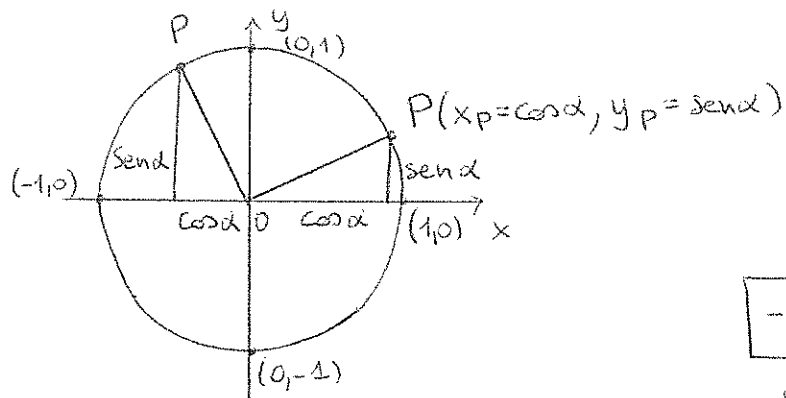


La **TRIGONOMETRIA** si occupa della

RISOLUZIONE di un TRIANGOLO, cioè di determinare tutti gli elementi di un triangolo (tutti i lati e tutti gli angoli) essendo noti alcuni di essi.

È necessario introdurre i concetti di **SENO** e **COSENO** di un ANGOLO.

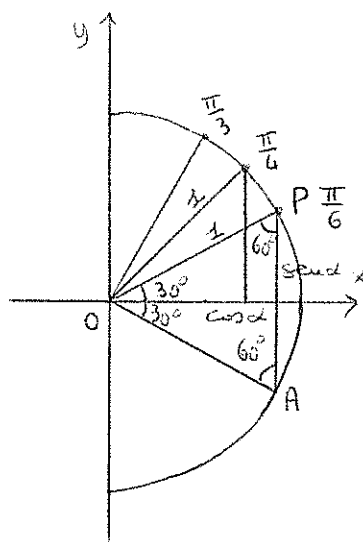
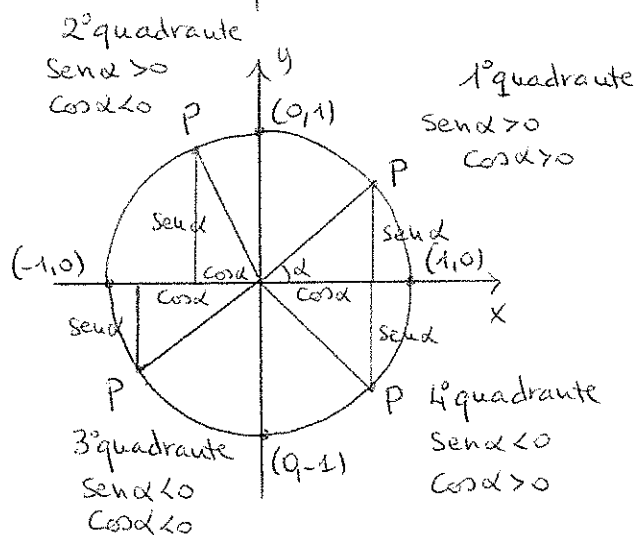
Preso un angolo  $\alpha$ , sulla CIRCONF. GONIOMETRICA vi corrisponde un punto P. Si definiscono COSENO e SENNO dell'angolo  $\alpha$  (indicati con  $\cos \alpha$  e  $\sin \alpha$ ) rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del punto P.



Risulta immediatamente che

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \quad \forall \alpha$$

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1, \quad -1 \leq \sin \alpha \leq 1$$



Per calcolare il seno e il coseno di  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  basta osservare che sono uguali e uguali al lato di un quadrato che ha diagonale 1:  
 $d = l \cdot \sqrt{2} \Rightarrow l \cdot \sqrt{2} = 1 \Rightarrow l = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Per calcolare invece il seno e il coseno di  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  consideriamo il triangolo OAP che risulta EQUILATERO di  $l = 1$ . Poiché  
 $\sin \alpha = \frac{1}{2} l \Rightarrow \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$  e per il Teorema di Pitagora  $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

| gradi    | 0° | 30°                  | 45°                  | 60°                  | 90°             | 120°             | 135°             | 150°             | 180°  |
|----------|----|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|-------|
| radianti | 0  | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\pi$ |
| Seno     | 0  | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |                  |                  |                  |       |
| Coseno   | 1  | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |                  |                  |                  |       |