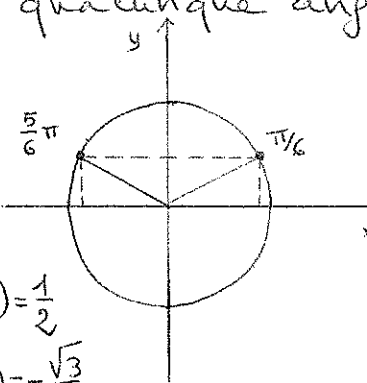


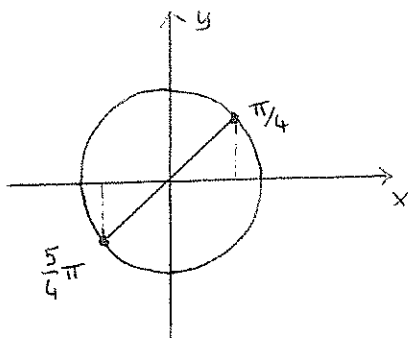
6^a lezione, 6 ottobre 2017Riprendiamo la **TRIGONOMETRIA**

Dai valori di SENO e COSENO degli angoli $0 \frac{\pi}{6} \frac{\pi}{4} \frac{\pi}{3} \frac{\pi}{2}$ posti nel 1° quadrante è possibile calcolare il valore di SENO e

COSENO di un qualunque angolo α con $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Ad esempio

$$\alpha = \frac{5}{6}\pi \quad (150^\circ)$$


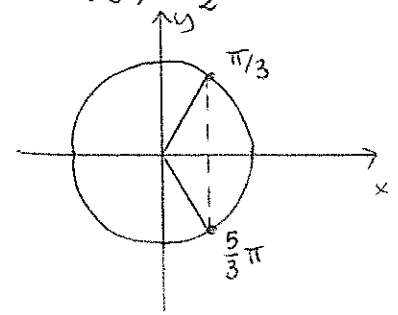
$$\alpha = \frac{5}{4}\pi \quad (225^\circ)$$


$$\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \frac{5}{3}\pi \quad (300^\circ)$$


$$\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Un angolo può essere anche maggiore di un angolo giro: se la semiretta continua a ruotare in verso antiorario si ottengono angoli $\alpha > 2\pi$.

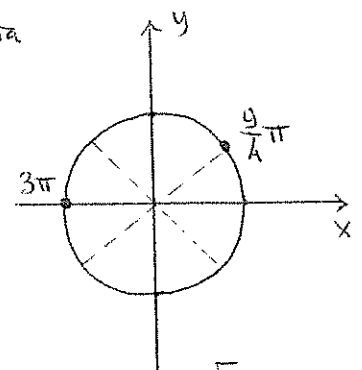
ES. $\alpha = 3\pi$ si ottiene dalla rotazione della semiretta di 1 giro e $\frac{1}{2}$

Il seno e il coseno sono gli stessi dell'angolo corrispondente in $[0, 2\pi[$

$$\sin(3\pi) = 0 \quad \cos(3\pi) = -1$$

In gradi $\alpha = 540^\circ$.

$\alpha = \frac{9}{4}\pi$ si ottiene da una rotazione di 1 giro + $\frac{\pi}{4}$ (405°)



$$\sin\left(\frac{9}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

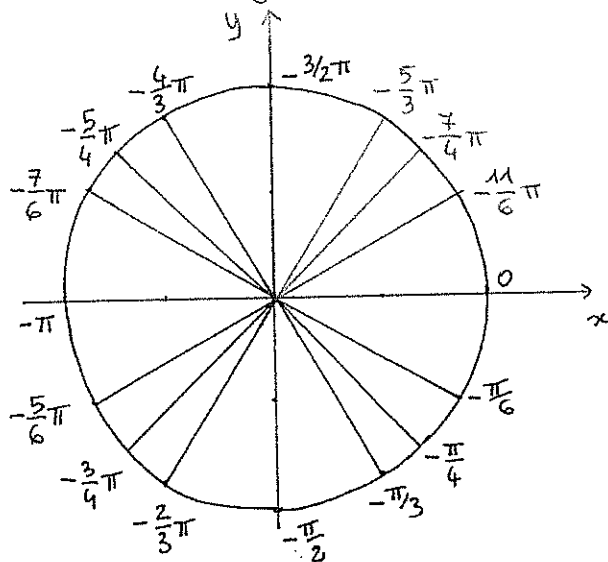
$$\cos\left(\frac{9}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

E' possibile considerare anche ANGOLI NEGATIVI

-2-
6/10/17

$\alpha < 0$.

Così come sulla retta reale (orientata verso destra) il numero $x = -2$ si trova di 2 unità prima di $x = 0$, gli angoli negativi si trovano (girando in verso antiorario) prima dell'angolo 0. Ad esempio si ottengono i seguenti angoli



$-\frac{\pi}{6} = -30^\circ$ si trova 30° prima di 0 (cioè da $-\frac{\pi}{6}$ in verso antiorario dopo 30° si trova l'angolo 0); $-\frac{2}{3}\pi = -120^\circ$ si trova 120° prima di 0 (da $-\frac{2}{3}\pi$ in verso antiorario dopo 120° si trova l'angolo 0) e così via.

Quindi per individuare la posizione di un angolo $\alpha < 0$, basta in realtà spostarsi da 0 in verso orario del corrispondente angolo senza il segno -; ma NON SI DEVE PENSARE che gli angoli negativi si misurino in verso orario...

Il seno e il coseno di tali angoli si calcolano mediante ascissa e ordinata del punto corrispondente sulla circonferenza goniometrica, non appena disegnato l'angolo.

Ad es. $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$, $\cos(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(-\frac{3}{4}\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(-\frac{3}{4}\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$

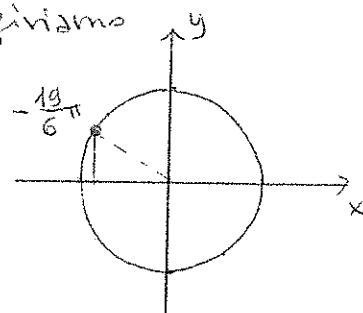
6/10/17

Gli angoli negativi possono essere anche $\alpha < -2\pi$:

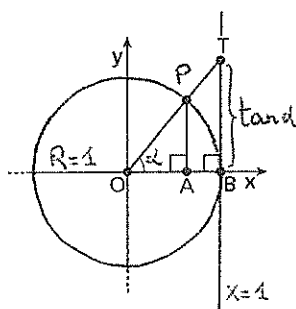
per disegnarli si procede come per quelli $> 2\pi$ tenendo conto del segno $\ominus$.

Ad es. $\alpha = -\frac{19}{6}\pi$ è un angolo negativo di $-(2\pi + \frac{7}{6}\pi)$, cioè 1 giro e $\frac{7}{6}\pi$ prima dell'angolo 0. Per disegnarlo giriamo da 0 in verso orario per 1 giro e $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}$

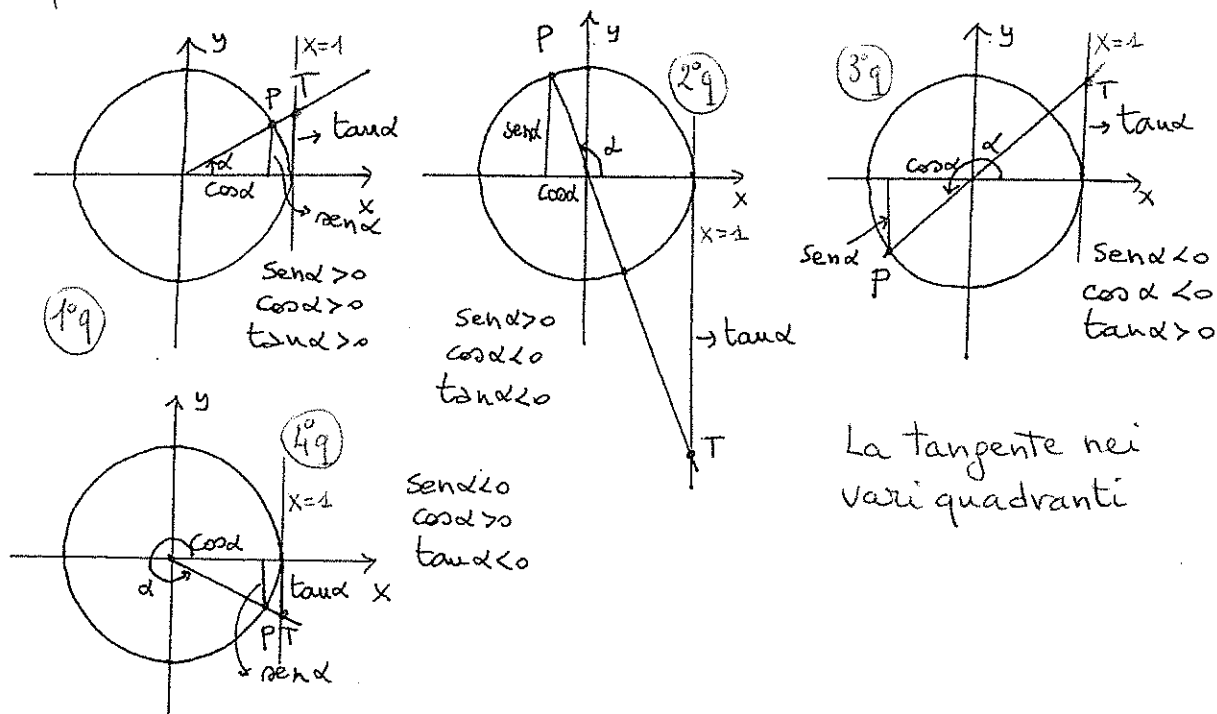
$$\sin(-\frac{19}{6}\pi) = \frac{1}{2} \quad \cos(-\frac{19}{6}\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



TANGENTE



Def. Data la circonfer. goniometrica (centro $C(0,0)$ e $R=1$) e fissato un angolo α con $0 \leq \alpha < 2\pi$, la TANGENTE dell'angolo α ($\tan \alpha$) è l'ordinata del punto in cui la retta verticale $x=1$ interseca la semiretta uscente dall'origine e passante per P. Nel disegno $\tan \alpha = y_T$.



Si noti che mentre $\tan 0 = 0$ $\tan \pi = 0$ risulta che $\tan \frac{\pi}{2}$ e $\tan \frac{3}{2}\pi$ NON ESISTONO perché la semiretta OP è verticale e NON INTERSECA la retta $x=1$.

Dalla similitudine tra i due TRIANGOLI $\triangle OAP$ e $\triangle OBT$ otteniamo che

$$\text{Sen } \alpha : \text{tan } \alpha = \text{Cos } \alpha : 1$$

da cui si ricava $\boxed{\text{tan } \alpha = \frac{\text{Sen } \alpha}{\text{Cos } \alpha}}$ che consente di calcolare

la tangente dei vari angoli. Per angoli $\alpha \geq 2\pi$ o $\alpha < 0$ si procede come già spiegato. (*) se $\text{Cos } \alpha \neq 0$

Otteniamo i seguenti valori

$$0 \quad \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{2}$$

Sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$

ES. $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$

$\tan(\frac{5}{2}\pi) \nexists$

$\tan(\frac{7}{6}\pi) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan(\frac{2}{3}\pi) = -\sqrt{3}$

$\tan(-\frac{7}{3}\pi) = -\sqrt{3}$



IL COEFFICIENTE ANGOLARE di una retta

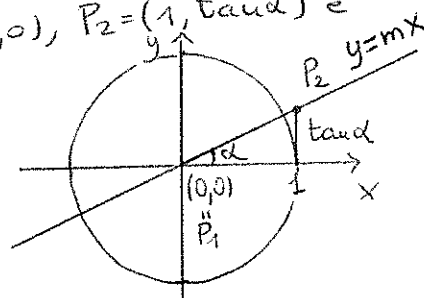
Consideriamo la circonferenza trigonometrica e la retta $y = mx$ di coeff. angolare m .

Abbiamo visto che presi

comunque due punti sulla retta $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ risulta che $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Consideriamo $x_1 = 0$ e $x_2 = 1 \Rightarrow P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, \text{tan } \alpha)$ e

$\boxed{m = \text{tan } \alpha}$ - In generale

il COEFFICIENTE ANGOLARE di una retta è uguale alla TANGENTE dell'ANGOLO che la retta forma con l'asse x (orientato verso destra).



FUNZIONI

-5-
6/10/17

Def. Una FUNZIONE tra due insiemi $f: A \rightarrow B$ è una LEGGE che ad ogni elemento del primo insieme A (detto DOMINIO) associa UNO ED UN SOLO ELEMENTO del secondo insieme B (detto CODOMINIO). Quindi

$$\forall a \in A \exists! b \in B : f(a) = b.$$

$$a \xrightarrow[\text{LEGGE}]{f} b = f(a)$$

Si dice che b è l' IMMAGINE di a tramite f .

Oss. A è l'insieme su cui la legge è definita, B è l'insieme di arrivo. La funzione non è solo la legge ma è la TERNA costituita da (A, B, LEGGE) .

ES. $A = \{\text{studenti di questa classe}\}$

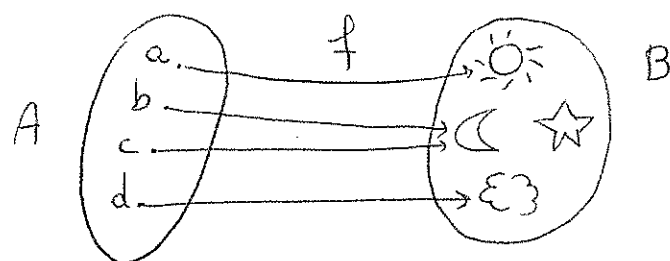
$B = \{\text{stature in cm da } \underset{1,50 \text{ m}}{150} \text{ cm a } \underset{2 \text{ m}}{200} \text{ cm}\}$

La legge $f: A \rightarrow B$ che ad ogni studente associa la sua statura è una FUNZIONE.

Può succedere che due o più studenti abbiano la stessa statura, cioè la stessa immagine, ma questo non è un problema. Per avere una funzione è richiesto che ogni studente abbia un'unica statura perfettamente definita.

ES. $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{\odot, \subset, \star, \{\}\}$

$f: A \rightarrow B$



Abbiamo che $f(a) = \odot$ e $f(c) = \mathbb{C}$

-6-

6/10/17

Def. Si dice **IMMAGINE** di A tramite f o **IMMAGINE di f** l'insieme delle immagini di tutti gli elementi di A

$$\text{Im} f = f(A) = \{ f(a) : a \in A \}.$$

ES. Nel nostro esempio $\text{Im} f = \{ \odot, \mathbb{C}, \{3\} \}$. La $\star \notin \text{Im} f$ perché non è immagine di nessun elemento di A .

Def. Dato $b \in B$ se $f(a) = b$ si dice che a è **CONTROIMMAGINE** di b e si indica con $f^{-1}(b)$ l'insieme di tutte le controimmagini di b .

OSS. Dato $b \in B$ l'insieme $f^{-1}(b)$ può essere vuoto se $b \notin \text{Im} f$, oppure contenere uno o più elementi (anche infiniti).

ES. Nel nostro esempio $f^{-1}(\odot) = \{a\}$ $f^{-1}(\mathbb{C}) = \{b, c\}$
 $f^{-1}(\star) = \emptyset$ $f^{-1}(\{3\}) = \{d\}$.

Def. Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice **INIETTIVA** se

$\forall b \in B$ l'insieme $f^{-1}(b)$ contiene al massimo un elemento, cioè se ogni elemento $b \in B$ ammette al più una controimmagine.

OSS. Se f è iniettiva $f^{-1}(b)$ può essere $\emptyset$ oppure contenere 1 solo elemento.

ES. Nel nostro esempio f non è iniettiva perché $f^{-1}(\mathbb{C})$ contiene due elementi.

Def. Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice **SURIETTIVA** se

$$\forall b \in B \text{ l'insieme } f^{-1}(b) \neq \emptyset,$$

cioè se ogni elemento $b \in B$ ammette almeno una controimmagine.

Osserviamo che

$$f \text{ SURIETTIVA} \Leftrightarrow \text{Im} f = B$$

Infatti se f è suriettiva $\Rightarrow \forall b \in B$ b ammette almeno una controimmagine $\Rightarrow \forall b \in B$ b è immagine di un qualche $a \in A$
 $\Rightarrow \forall b \in B$ $b \in \text{Im} f \Rightarrow \text{Im} f = B$.

Viceversa se $\text{Im} f = B \Rightarrow \forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b \Rightarrow \forall b \in B f^{-1}(b) \neq \emptyset$
 $\Rightarrow f$ è SURIETTIVA.

ES. Nel nostro esempio f non è suriettiva perché $f^{-1}(\star) = \emptyset$
oppure perché $\text{Im} f \neq B$ (non contenendo appunto $\star$).

Def Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice BIUNIVOCA se è sia INIETTIVA sia SURIETTIVA ossia se

$\forall b \in B \exists! a \in A : f(a) = b$
cioè $\forall b \in B$ l'insieme delle controimmagini $f^{-1}(b)$ contiene uno ed un solo elemento.

OSS. Se una funzione è definita tramite un DIAGRAMMA

A FRECCE allora

per TROVARE L'IMMAGINE di $a \in A$

BASTA SEGUIRE LA FRECCIA CHE PARTE da a

per TROVARE LE CONTROIMMAGINI di $b \in B$

BASTA TORNARE INDIETRO LUNGO LE FRECCE CHE ARRIVANO a b

per STABILIRE se f è INIETTIVA

BASTA CONTROLLARE CHE SU OGNI ELEM. di B ARRIVI AL MASSIMO UNA FRECCIA

per DETERMINARE $\text{Im} f$

BASTA CONSIDERARE TUTTI GLI ELEMENTI di B su cui ARRIVA ALTENO UNA FRECCIA.

per STABILIRE se f è SURIETTIVA

BASTA CONTROLLARE CHE SU OGNI ELEM. di B ARRIVI ALTENO UNA FRECCIA

(oppure CONTROLLARE se $\text{Im} f = B$).

Passiamo ora a considerare FUNZIONI REALI di
VARIABILE REALE, cioè $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Se non è diversamente specificato si intende che $B = \mathbb{R}$.

ES. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 2x$ che ad ogni numero
Consideriamo la FUNZIONE reale associa il suo doppio.

Ad es. $f(3) = 6$ cioè 6 è l'immagine di 3

$f(-4) = -8$ cioè -8 è l'immagine di -4 e così via.

Viceversa $f^{-1}(4) = \{2\}$, $f^{-1}(-8) = \{-4\}$ (2 è la controimmagine di 4 e -4 è la controimmagine di -8) e in generale

dato $y \in \mathbb{R}$ $f^{-1}(y) = \{\frac{y}{2}\}$. La controimmagine di ogni $y \in \mathbb{R}$
è la sua metà.

Non esiste nessun $y \in \mathbb{R}$ che non abbia controimmagini (anche
per $y=0 \rightarrow f^{-1}(0) = \{0\}$) e ogni $y \in \mathbb{R}$ ha una ed una sola
controimmagine $x = \frac{y}{2}$. Pertanto f è BIUNIVOCA e $\text{Im} f = \mathbb{R}$.

OSS (IMPORTANTE) - Abbiamo dimostrato che f è INIETTIVA

utilizzando direttamente la definizione perché in questo caso
è facile trovare la controimmagine che è unica.

Esistono però due DEFINIZIONI (EQUIVALENTI) di FUNZIONE INIETTIVA
a quella data
che sono molto utili per verificare che una funzione è INIETTIVA

Sia $f: A \rightarrow B$ una FUNZIONE.

Def. 1 f è INIETTIVA $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Def. 2 f è INIETTIVA $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Per la funzione $f(x) = 2x$ è molto semplice dimostrare che
 f è iniettiva sia con Def. 1 che con Def. 2.

Def 1 se dati $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ risulta $\overset{f(x_1)}{f(x_1)} \overset{f(x_2)}{f(x_2)}$ $2x_1 = 2x_2$

-9-
6/10/17

$\Rightarrow$ moltiplicando entrambi i membri per $\frac{1}{2}$ si ottiene subito $x_1 = x_2$.

Def 2 se dati $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ risulta $x_1 \neq x_2 \Rightarrow$ moltiplicando entrambi i membri per 2 si ottiene subito che $2x_1 \neq 2x_2$ $\overset{f(x_1)}{f(x_1)} \overset{f(x_2)}{f(x_2)}$

OSS. Le definizioni Def 1 e Def 2 non si devono

confondere con $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ che è una proprietà ovvia che vale per ogni funzione.

ES. Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $\boxed{f(x) = x^2}$

che ad ogni numero reale associa il suo quadrato.

Ad es. $f(2) = 4, f(-2) = 4$ cioè 4 è l'immagine sia di 2 che di -2

$$f^{-1}(4) = \{-2, 2\}$$

le controimmagini di 4 sono -2, 2

$f^{-1}(-4) = \emptyset$ se un numero è $\overset{y < 0}{\text{NEGATIVO}}$ non ha nessuna controimmagine (infatti $\forall x \quad x^2 \geq 0$)

$f^{-1}(0) = 0$ $y = 0$ ha una sola controimmagine $x = 0$

mentre $\forall y > 0$ ammette 2 controimmagini ($x = \pm\sqrt{y}$).

In conclusione $\text{Im} f = [0, +\infty[$ e f non è né INIETTIVA né SURIETTIVA.

OSS. La suriettività di una funzione non crea mai problemi:

se serve lavorare con una funzione suriettiva basta modificare il codominio e specificare che si considera

$B = \text{Im} f$. Ad esempio se prendiamo

$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ definita da $f(x) = x^2$ otteniamo

una funzione suriettiva (senza che nulla sia cambiato, grafico compreso, a parte il codominio). Per ottenere una funzione

iniettiva (come vedremo) la funzione deve essere modificata in modo più consistente.

-10-
6/10/17

GRAFICO di una FUNZIONE

Ricordiamo che dati due insiemi A e B l'insieme

PRODOTTO CARTESIANO di A e B , che si indica con $A \times B$, è così definito

$$A \times B = \{ (a, b) : a \in A, b \in B \}$$

cioè è l'insieme di tutte le coppie ORDINATE con primo elemento in A e secondo elemento in B .

ES. 1. Se $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{ \circ, \mathbb{C}, \star, \mathbb{E} \}$, allora

$$A \times B = \{ (a, \circ), (a, \mathbb{C}), (a, \star), (a, \mathbb{E}), (b, \circ), (b, \mathbb{C}), (b, \star), (b, \mathbb{E}), (c, \circ), (c, \mathbb{C}), (c, \star), (c, \mathbb{E}), (d, \circ), (d, \mathbb{C}), (d, \star), (d, \mathbb{E}) \}.$$

2. Se $A = B = \mathbb{R} \Rightarrow A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ è l'insieme

$\mathbb{R}^2 = \{ (x, y) : x, y \in \mathbb{R} \}$ di tutte le coppie ordinate di numeri reali, ossia il **PIANO CARTESIANO**.

Def. Data una funzione $f: A \rightarrow B$, si dice **GRAFICO di f**

il SOTTOINSIEME del PRODOTTO CARTESIANO definito da

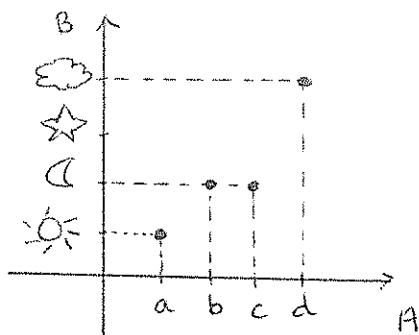
$$\text{graf} = \{ (a, b) \in A \times B : b = f(a) \}$$

cioè l'insieme di tutte le coppie con $a \in A$ e b immagine di a tramite f .

Il grafico si può visualizzare utilizzando due assi e viene a costituire il "DISEGNO" di f .

Il grafico CONTIENE TUTTE LE INFORMAZIONI sulla funzione f .

ES. 1)



Il grafico è costituito dai quattro punti •.

Dal grafico si possono ricavare
TUTTE LE INFORMAZIONI
Sulla FUNZIONE.

-11-
6/10/17

PER DETERMINARE:

il DOMINIO di f

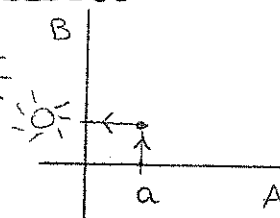
si deve proiettare il grafico sull'asse A
 $\Rightarrow \text{dom} f = \{a, b, c, d\}$

l'immagine

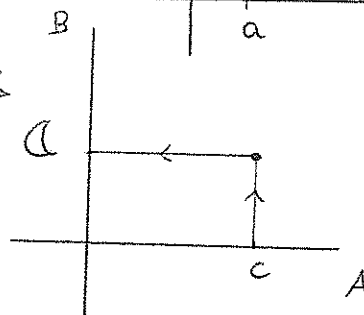
di un elemento di A

si deve seguire la linea fino a B
partendo
dall'elemento scelto

ad es. $f(a) = \text{sun}$



oppure $f(c) = \text{star}$



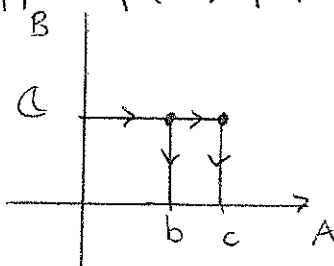
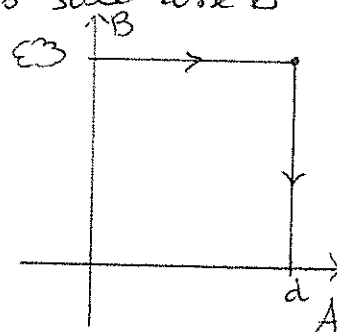
le controimmagini

di un elemento $b \in B$

Si deve seguire la linea che parte
dall'elemento scelto sull'asse B
e tornare ad A

ad es. $f^{-1}(\epsilon) = \{d\}$

oppure $f^{-1}(\text{star}) = \{b, c\}$



$\text{Im} f$

Si deve proiettare il grafico sull'asse B

$\Rightarrow \text{Im} f = \{\text{sun}, \text{cloud}, \text{star}, \epsilon\}$

2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 2x$

$\text{graf } f = \{ (x, y) \in \mathbb{R} : y = 2x \}$

il grafico di f ha EQUAZIONE $y = 2x$
e rappresenta una retta per $(0, 0)$
di coefficiente angolare $m = 2$.

$\text{dom } f = \mathbb{R}$ (proiettando il grafico
sull'asse x si ottiene
tutto $\mathbb{R}$)

$f(1) = 2 \quad f(2) = 4 \quad f(-1) = -2 \quad f(0) = 0$

(basta seguire la retta verticale
dal valore di x scelto fino al grafico e poi quella orizzontale
fino all'asse y)

$f^{-1}(-2) = -1 \quad f^2(4) = 2$

(basta seguire la retta orizzontale dal valore di y scelto
fino al grafico e poi quella verticale fino all'asse x)

$\text{Im } f = \mathbb{R}$ (proiettando il grafico sull'asse y si ottiene
tutto $\mathbb{R}$)

PER DETERMINARE se f è INIETTIVA e/o SURIETTIVA

dobbiamo studiare il numero delle controimmagini, quindi
basta considerare una retta orizzontale $y = k$ e vedere
quante volte interseca il grafico, infatti ad ogni
intersezione corrisponde una controimmagine di k .
Quindi

se la retta $y = k$ interseca il grafico $\forall k \in \mathbb{R}$

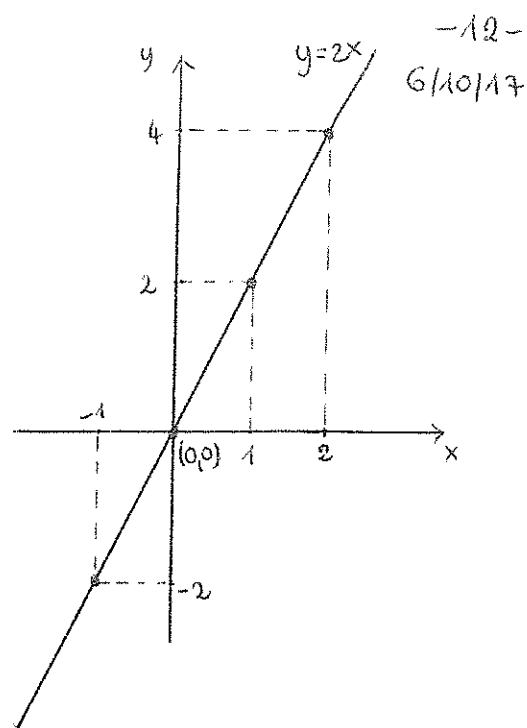
$\Rightarrow f$ è SURIETTIVA

(può intersecare il grafico anche più volte)

se la retta $y = k$ interseca il grafico al massimo una volta
 $\forall k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ è INIETTIVA

(può anche non intersecare il grafico per certi valori di k)



se $\forall k \in \mathbb{R}$ la retta $y=k$ interseca il grafico UNA ed UNA SOLA VOLTA $\Rightarrow f$ è BIUNIVOCA.

-13-
611017

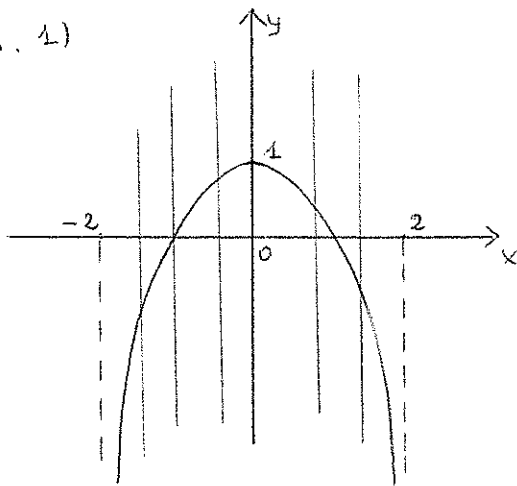
La funzione $f(x)=2x$ è BIUNIVOCA da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE - 1) Non si deve confondere la funzione, che è una terna costituita da 2 INSIEMI e 1 LEGGE che dice come calcolare l'immagine di un elemento, con il GRAFICO di f che è UN INSIEME GEOMETRICO. Nel caso di funzioni $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ il grafico è una LINEA nel PIANO e ha un'EQUAZIONE.

2) Viceversa, data una LINEA nel PIANO ci si può chiedere

se SI TRATTI del GRAFICO di una FUNZIONE.

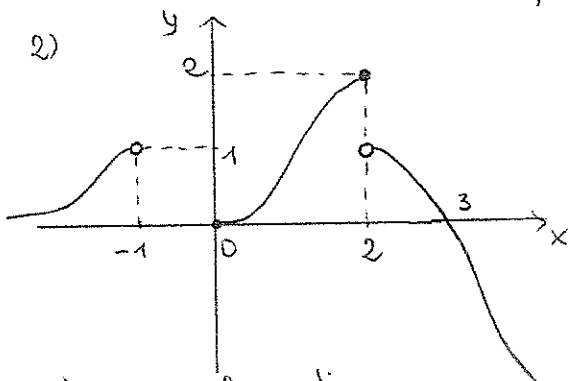
ES. 1)



Se si tratta del grafico di una funzione $\Rightarrow \text{dom } f =]-2, 2[$

Poi $\forall x \in]-2, 2[$ dobbiamo controllare che $\exists! f(x)$, quindi basta controllare tutte le rette verticali per un punto del dominio e controllare se intersecano la linea del

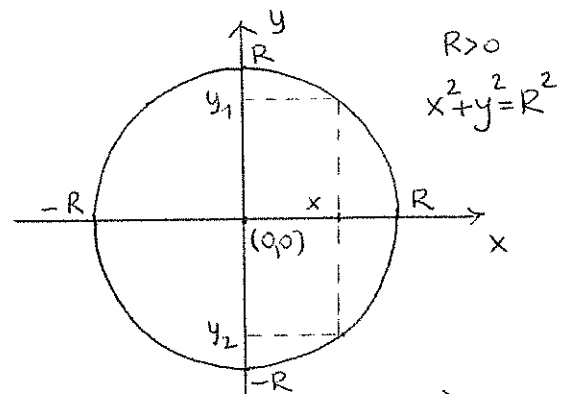
disegno UNA ed UNA SOLA VOLTA. In questo caso il disegno è il GRAFICO di una funzione f .



È il grafico di

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A = \text{dom } f =]-\infty, -1[\cup [0, +\infty[$
 $f(2) = 2$

3)



Una circonferenza NON PUÒ ESSERE IL GRAFICO di una funzione $f: [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$ perché ogni $x \in]-R, R[$ avrebbe DUE IMMAGINI.