

8^a lezione, 12 ottobre 2017

OPERAZIONI sulle FUNZIONI

Abbiamo visto che una funzione $f: \text{dom} f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una LEGGE che assegnato un numero "in partenza" dice come calcolare, a partire da questo, il numero "in arrivo":

$$x \xrightarrow{\text{LEGE}} f(x)$$

Es. Se $f(x) = x^2 - 3x$, allora $f(-x) = (-x)^2 - 3(-x) = x^2 + 3x$ perché la legge dice di elevare al quadrato e poi togliere 3 volte il numero. Allo stesso modo $f(2x) = (2x)^2 - 3(2x) = 4x^2 - 6x$, $f(x+2) = (x+2)^2 - 3(x+2) = x^2 + x - 2$ e $f(t) = t^2 - 3t$ (abbiamo solo cambiato il nome alla variabile indipendente).

Def. Date due funzioni $f: \text{dom} f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \text{dom} g \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possiamo definire la SOMMA, la DIFFERENZA e il PRODOTTO delle due funzioni f e g :

$$\boxed{\text{SOMMA}} \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\boxed{\text{DIFFERENZA}} \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$\boxed{\text{PRODOTTO}} \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

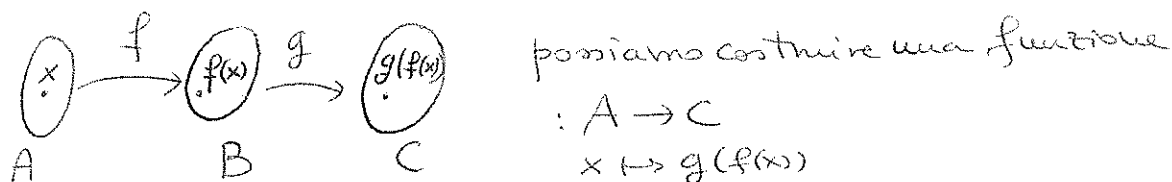
Tutte e tre queste funzioni hanno per dominio l'insieme $\text{dom} f \cap \text{dom} g$.

Def. Data una funzione $f: \text{dom} f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possiamo definire la funzione $\boxed{\text{RECIPROCO}}$ di f

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$$

$$\text{dom} \frac{1}{f} = \left\{ x \in \text{dom} f : f(x) \neq 0 \right\}$$

E' anche possibile **COMPORRE** due funzioni nel senso di applicarle una dopo l'altra :



Def. Date due funzioni $f: \text{dom} f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \text{dom} g \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **COMPOSIZIONE** (o **FUNZIONE COMPOSTA**) di f e g la funzione $g \circ f(x)$ definita da

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

il cui dominio è $\text{dom} g \circ f = \{ x \in \text{dom} f : f(x) \in \text{dom} g \}$

Oss. 1. Quando si scrive $g \circ f$ si intende che la funzione più interna, che è f , viene applicata per prima. In generale le due funzioni $g \circ f$ e $f \circ g$ sono diverse tra loro (sia come dominio che come legge) - **$g \circ f \neq f \circ g$**

Ad es. se $f(x) = x+1$ $\text{dom} f = \mathbb{R}$ e $g(x) = x^2$ $\text{dom} g = \mathbb{R}$

allora $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

mentre $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$.

In questo caso le leggi sono diverse mentre $\text{dom} g \circ f = \text{dom} f \circ g = \mathbb{R}$, ma vedremo più avanti che è possibile persino avere che una delle due composizioni è definita mentre l'altra no.

FUNZIONI POTENZE e FUNZIONI RADICI

Abbiamo visto che la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$f(x) = x^3$ è **BIUNIVOCA** e pertanto ammette la

FUNZIONE INVERSA che si chiama **RADICE CUBICA**

$\sqrt[3]{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione che ad ogni numero reale x associa l'unico numero reale il cui cubo è x

$$\sqrt[3]{x} = a \Leftrightarrow a^3 = x$$

Come è fatto il GRAFICO della funzione
 $\text{graf } \sqrt[3]{x} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sqrt[3]{x} \}$ $f(x) = \sqrt[3]{x}$?

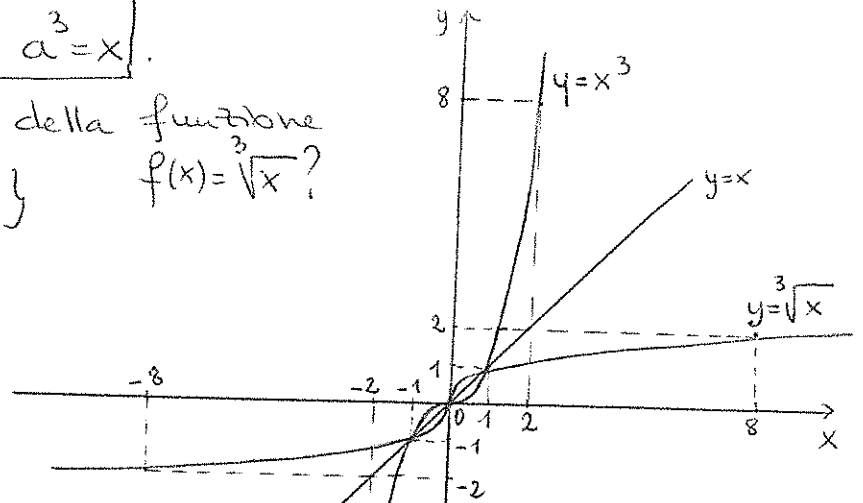
$$\sqrt[3]{1} = 1 \rightarrow (1, 1) \in \text{graf}$$

$$\sqrt[3]{8} = 2 \rightarrow (8, 2) \in \text{graf}$$

$$\sqrt[3]{-1} = -1 \rightarrow (-1, -1) \in \text{graf}$$

$$\sqrt[3]{0} = 0 \rightarrow (0, 0) \in \text{graf}$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \rightarrow (-8, -2) \in \text{graf} - \text{Osservando i punti}$$



che appartengono a $y = x^3$
 (ad es. $(2, 8) \in y = x^3$ e $(8, 2) \in y = \sqrt[3]{x}$)

si nota che $(x, y) \in \text{graf } f \Leftrightarrow (y, x) \in \text{graf } f^{-1}$: ne deduciamo

che il grafico di f^{-1} è l'insieme SIMMETRICO del grafico di f rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante.

Anche la funzione $\sqrt[3]{x}$ è BIUNIVOCA e STRETTAMENTE CRESCENTE.

Se, data $f: A \rightarrow B$ biunivoca, consideriamo $f^{-1} \circ f$ cioè andiamo da A a B con f e poi torniamo indietro ad A con f^{-1} otteniamo che

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \textcircled{x} & \xrightarrow{f} & \textcircled{f(x)} \\ & \xleftarrow{f^{-1}} & \end{array} \quad f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in A, \text{ cioè}$$

$$f^{-1} \circ f = I_A \quad \text{dove } I_A: A \rightarrow A \text{ è l'identità in } A.$$

⊗ Infatti
 $(x, y) \in \text{graf } f \Rightarrow y \text{ è immagine di } x$
 $(y, x) \in \text{graf } f^{-1} \Rightarrow x \text{ è controimmagine di } y$

Allo stesso modo si dimostra che $f \circ f^{-1} = I_B$ con $I_B: B \rightarrow B$ identità in B .

Allora $\sqrt[3]{x^3} = x$ e anche $(\sqrt[3]{x})^3 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Per questo si pone

$$\sqrt[3]{x} = x^{1/3} \quad \text{in modo che valgano le proprietà delle potenze } ((x^3)^{1/3} = x^1,$$

$$(x^{1/3})^3 = x^1) \text{ anche se si deve stare MOLTO ATTENTI a LAVORARE}$$

solo con valori di x in cui le potenze utilizzate siano DEFINITE.

Passiamo ora a vedere come sia possibile costruire una qualche funzione inversa partendo da $f(x)=x^2$.

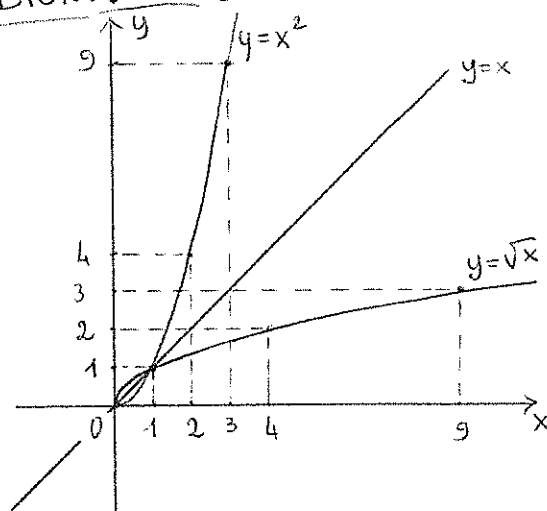
La funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x)=x^2$ non è né INIETTIVA né SURIETTIVA. Abbiamo già osservato che

$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ è SURIETTIVA, ma non è possibile tornare indietro in modo UNIVOCO perché $\forall y > 0 \exists 2$ valori dell'ascissa $x_1 < 0 < x_2$ tali che $x_1^2 = x_2^2 = y$.

Allora dobbiamo scegliere una delle ^{due} controimmagini e per farlo dobbiamo MODIFICARE IL DOMINIO - Ad es.

$f: [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[\quad f(x)=x^2$ è BIUNIVUCA (ma, come

si vede dal grafico, non è più la stessa funzione da cui siamo partiti). - Restringendo il dom f a $[0, +\infty[$ si è scelto di considerare solo la CONTROIMMAGINE ≥ 0 .



Questa funzione ammette

FUNZIONE INVERSA $f^{-1}: [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ che si chiama

RADICE QUADRATA

$\sqrt{x}: [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ è la funzione che ad ogni numero $x \geq 0$ associa l'unico numero ≥ 0 il cui quadrato è x

$$\boxed{\sqrt{x} = a \Leftrightarrow a^2 = x} \quad x \geq 0, a \geq 0$$

Se componiamo la funzione $f(x)=x^2$ con $g(x)=\sqrt{x}$ otteniamo

$$[0, +\infty[\xrightarrow{x^2} [0, +\infty[$$

$$\sqrt{x^2} = x \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 0$$

$$[0, +\infty[\xrightarrow{\sqrt{x}} [0, +\infty[$$

$$(\sqrt{x})^2 = x \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 0$$

Il GRAFICO di $f(x)=\sqrt{x}$ è l'INSIEME SIMMETRICO rispetto alla bisettrice del 1° e 3° q del grafico di x^2 su $[0, +\infty[$.

OSS. (IMP) La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ NON È L'INVERSA della funzione $f(x) = x^2$, ma È L'INVERSA della RESTRIZIONE di x^2 a $[0, +\infty[$. Quindi in generale non si può semplificare $\sqrt{\quad}$ e $(\quad)^2$.

Notiamo che se $x < 0$ $(\sqrt{x})^2$ non è NEANCHE DEFINITO, mentre $\sqrt{x^2}$ non è x bensì $|x|$: $\boxed{\sqrt{x^2} = |x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Da non dimenticare: $\sqrt{x}$ è DEFINITA $\Leftrightarrow x \geq 0$

$$\sqrt{x} \geq 0 \quad \forall x \geq 0 \quad x \geq 0 \Rightarrow \boxed{\sqrt{x}} - \sqrt{x} \geq 0$$

$$\sqrt{1} = 1 \quad \sqrt{4} = 2 \quad \sqrt{9} = 3 \quad \dots$$

Il grafico di $f(x) = \sqrt{x}$ è l'insieme SIMMETRICO (rispetto alla bisettrice del 1° e 3° q) del grafico di x^2 su $[0, +\infty[$.

Per poter utilizzare le proprietà delle potenze si scrive

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \text{ma ha senso solo se } \underline{x \geq 0}.$$

DOMINIO di una FUNZIONE

ESEMPIO $f(x) = \frac{\sqrt{3-6x^2+7x}}{11-8x} + \sqrt[3]{x-3}$ $\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} : \begin{matrix} 3-6x^2+7x \geq 0, \\ 11-8x \neq 0 \end{matrix}\}$

$$\begin{cases} 6x^2-7x+3 \leq 0 \\ 11-8x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-72}}{12} = \frac{7 \pm 11}{12} = \frac{-1}{3}, \frac{3}{2} \\ x \neq \frac{11}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}] \\ x \neq \frac{11}{8} \end{cases}$$

poiché $\frac{11}{8} < \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ $\text{dom } f = [-\frac{1}{3}, \frac{11}{8}[\cup]\frac{11}{8}, \frac{3}{2}]$

COMPOSIZIONE di due FUNZIONI

ESEMPIO 1) $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = x+1$
 $\text{dom } f = [0, +\infty[$ $\text{dom } g = \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1$ definita $x \in [0, +\infty[$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = \sqrt{x+1}$ definita per $x \in [-1, +\infty[$.

2) $f(x) = -1 - x^2$ $g(x) = \sqrt{x}$
 $\text{dom } f = \mathbb{R}$ $\text{dom } g = [0, +\infty[$

-6-
12/10/17

$(g \circ f)(x) = g(-1 - x^2) = \sqrt{-1 - x^2}$ e non esiste alcun valore di x in cui è definita perché

quindi gof NON SI PUÒ DEFINIRE

$f(x) < 0 \quad \forall x$ (anzi $f(x) \leq -1 \quad \forall x$)

$(f \circ g)(x) = f(\sqrt{x}) = -1 - (\sqrt{x})^2 = -1 - x$ per $x \in [0, +\infty[$.
 $\text{dom } f \circ g = [0, +\infty[$

EQUAZIONI con POTENZE e RADICI

Osserviamo innanzitutto che

se una funzione f è BIUNIVOCA, allora

$$f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$$

Dim. f è iniettiva, quindi vale $\Rightarrow$; viceversa se $a = b \Rightarrow$

$f(a) = f(b)$ perché f è una funzione.

Quindi, essendo sia $f(x) = x^3$ che $g(x) = \sqrt[3]{x}$ due funzioni

BIUNIVOCHE: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ abbiamo che

(E1) $a^3 = b^3 \Leftrightarrow a = b$ ($\forall a, b \in \mathbb{R}$)
 (E2) $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b} \Leftrightarrow a = b$ ($\forall a, b \in \mathbb{R}$)

EQUAZIONI
con $(\cdot)^3, (\cdot)^2, \sqrt{\cdot}$

$$x^3 = a$$

$x^3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è BIUNIVOCA $\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} \exists ! x: x^3 = a$

e l'eq.^{ue} ammette 1 sola sol.^{ue} $\forall a \in \mathbb{R}$

ES. $x^3 = 125 \rightarrow x = 5$ ($x^2 = 25, x^3 = 125, x = \sqrt[3]{125}$)

$(a(x))^3 = (b(x))^3 \Leftrightarrow a(x) = b(x)$ per (E1)

ES. $(x+2)^3 = (2x-5)^3$

$\Uparrow$ (E1)

$x+2 = 2x-5 \quad \Leftrightarrow \quad x=7$

$$(a(x))^2 = (b(x))^2$$

In questo caso conviene osservare che

$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$$

$$\text{ES. } (x^2 + x - 2)^2 = (x^2 - x - 2)^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2 + x - 2} = \cancel{x^2 - x - 2} \vee$$

$$x^2 + x - 2 = -x^2 + x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \vee 2x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 2$$

$$\text{SOL.}^{\text{ue}} \quad x = 0, x = \pm\sqrt{2}.$$

Quando l'eq.^{ue} contiene $\sqrt[3]{}$, conviene ricordare anche la DEFINIZIONE

$$(E3) \quad \sqrt[3]{x} = a \Leftrightarrow x = a^3 \quad \forall x, a \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt[3]{x} = a$$

$\sqrt[3]{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è BIUNIVOCA $\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} \exists ! x : \sqrt[3]{x} = a$
 e l'eq.^{ue} ammette 1 sola sol.^{ue} $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\text{ES. } \sqrt[3]{x} = -4 \quad 3 \text{ POSSIBILITA' } 1^a) -4 = \sqrt[3]{-64} \rightarrow \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{-64} \Leftrightarrow x = -64$$

per (E2)

$$2^a) \sqrt[3]{x} = -4 \Leftrightarrow x = (-4)^3 = -64 \text{ per (E3) (modo più facile e più veloce)}$$

$$3^a) \sqrt[3]{x} = -4 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x})^3 = (-4)^3 \Leftrightarrow x = -64 \text{ ricordando che}$$

(E1) con $a = \sqrt[3]{x} \quad b = -4$

$(\sqrt[3]{x})^3 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

$$\sqrt[3]{a(x)} = \sqrt[3]{b(x)} \Leftrightarrow a(x) = b(x) \text{ per (E2)}$$

$$\text{ES. } \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{17-x} \Leftrightarrow x-1 = 17-x \Leftrightarrow 2x = 18 \Leftrightarrow x = 9.$$

(E2)

EQUAZIONI con $\sqrt{}$

E' necessario ricordare che una RADICE QUADRATA è DEFINITA
 Solo se il suo ARGOMENTO è ≥ 0 e anche che una radice quadrata
 è SEMPRE ≥ 0

$$\sqrt{a} \text{ ha senso solo se } a \geq 0$$

$$\sqrt{a} \geq 0 \quad \forall a \geq 0$$

Inoltre, per definizione di radice quadrata

$$a \geq 0, b \geq 0 \quad \sqrt{a} = b \Leftrightarrow a = b^2 \quad (E4)$$

-8-
12/10/17

$\sqrt{x} = a$ CONDIZIONE di ESISTENZA $x \geq 0$ (se $x < 0$, l'equazione NON ha SIGNIFICATO)

$a < 0$ l'eq.^{ue} è IMPOSSIBILE (nessun numero $x \geq 0$ ha una radice quadrata NEGATIVA)

$a = 0$ l'eq.^{ue} è $\sqrt{x} = 0$ che ha come sol.^{ue} $x = 0$

$a > 0$ l'eq.^{ue} è $\sqrt{x} = a \Leftrightarrow x = a^2$ per (E4)

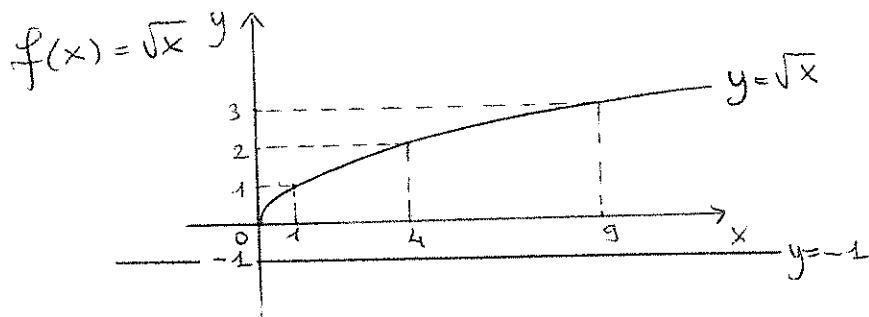
$$\text{ES. } \sqrt{x} = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \text{ affinché abbia senso} \\ 9 \geq 0 \text{ affinché abbia una sol.}^{\text{ue}} \\ x = 9^2 = 81 \text{ la sol.}^{\text{ue}} \end{cases} \begin{cases} x \geq 0 \\ \text{Vera} \\ x = 81 \end{cases}$$

Sol.^{ue} $x = 81$

$$\sqrt{x} = -1 \text{ EQ.}^{\text{ue}} \text{ IMPOSSIBILE} \quad \left(\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -1 \geq 0 \text{ Falsa} \\ x = (-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \text{Falsa} \\ x = 1 \end{cases} \right)$$

$\Leftrightarrow$ nessuna sol.^{ue} - Infatti per $x = 1$
 $\sqrt{1} = 1$ e non -1 .

Oss. Il fatto che l'eq.^{ue} $\sqrt{x} = -1$ non abbia soluzioni si vede bene dal grafico di



$\sqrt{x} > -1$ sempre