

Per dare una definizione precisa di funzione periodica si deve considerare un insieme A (su cui la funzione risulti definita) che verifichi la proprietà $x \in A \Leftrightarrow x + T \in A$. Si nota subito che se $x \in A \Rightarrow x \pm T, x \pm 2T, x \pm 3T$ cioè $x \pm kT \in A$ e che quindi l'insieme non è limitato, né superiormente né inferiormente (cioè $\nexists L > 0 : |x| \leq L \forall x \in A$). Infatti $x \in A \Rightarrow x + T - T \in A \Rightarrow x - T \in A$ e anche $(x - T) + T$

ES. Va bene $A = \mathbb{R}$ ma anche ad es. $A = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} [2m, 2m+1] = [0, 1] \cup [2, 3] \cup [4, 5] \dots \cup [-4, -3] \cup [-2, -1]$.

$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in A.$$

Infatti ad es. $\sum_{m=2}^{\infty} f(x+2T) = f((x+T)+T) = f(x+T) = f(x)$.

Otteniamo $f(x+nT) = f(x) \quad \forall x \in A \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
 Tenuto poi conto che vale anche per $x-nT$ (ma $-nT$ non è un periodo!!)
 allora si scrive $f(x+kT) = f(x) \quad \forall x \in A \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Nel caso delle funzioni seno e coseno esse sono periodiche di periodo 2π e anche di periodo $2m\pi$ $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ - $T = 2\pi$ è il PERIODO MINIMO (però attenzione: il periodo minimo potrebbe non esistere per particolari funzioni).

OSS. Una funzione periodica NON è INIETTIVA perché
 $\forall y \in \text{Im}f \quad f^{-1}(y)$ contiene infiniti elementi.

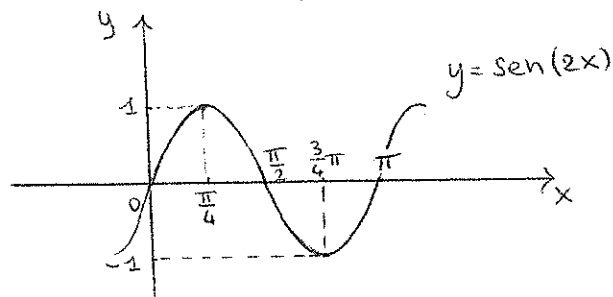
$$\boxed{g(x) = f(kx)} \quad k > 0 \quad \text{dom}g = \{x \in \mathbb{R} : kx \in \text{dom}f\} = k \cdot \text{dom}f$$

(dove $kA = \{kx : x \in A\}$)

grafico $y = f(kx)$ è una deformazione del grafico che mantiene inalterata $\text{Im}f$, ma il grafico risulta compresso se $k > 1$ e dilatato se $0 < k < 1$.

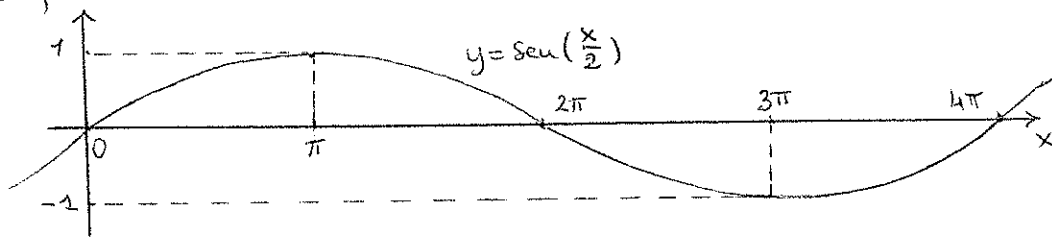
es. $f(x) = \sin(2x)$ $\text{dom}f = \mathbb{R}$

$T = \pi$ (il grafico risulta compresso)



$f(x) = \sin(\frac{1}{2}x)$ $\text{dom}f = \mathbb{R}$

$T = 4\pi$
(il grafico risulta dilatato)



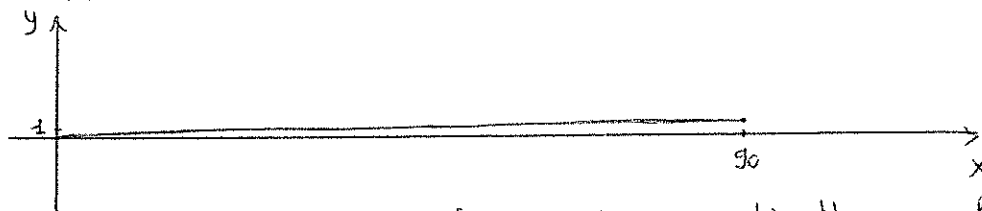
Per $\sin(kx)$ e $\cos(kx)$ $T = \frac{2\pi}{k}$.

OSS. La funzione SENO dell'angolo x con x misurato in GRADI

sarebbe $G\sin(x) = \sin(\frac{\pi}{180}x)$ il cui grafico è del tipo $y = \sin(kx)$

x = misura in gradi dell'angolo

(con $k = \frac{\pi}{180} \approx 0,0175$ quindi MOLTO piccolo) : in scala avremo



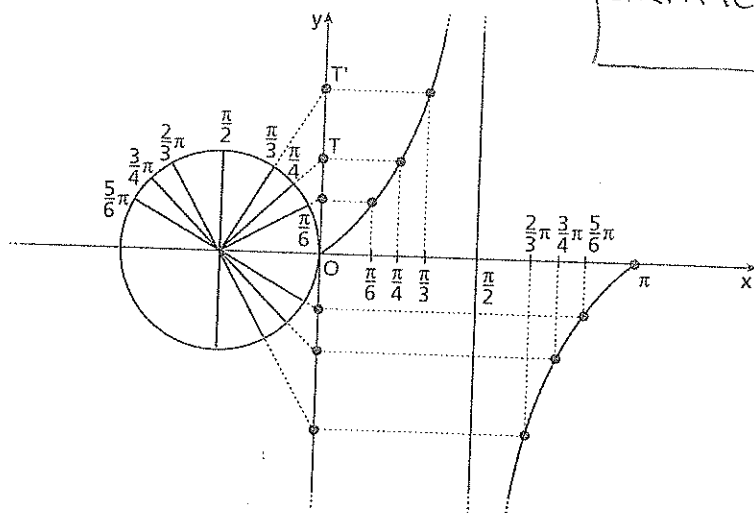
Inoltre, per chi conosce le DERIVATE, invece di ottenere le ben note formule $D\sin x = \cos x$, $D\cos x = -\sin x$ avremo

$DG\sin(x) = \frac{\pi}{180} \cos(\frac{\pi}{180}x) = \frac{\pi}{180} G\cos(x)$ e $DG\cos(x) = -\frac{\pi}{180} G\sin(x)$.

Queste sono fra le ragioni per cui gli angoli vengono misurati in RADIANTI.

GRAFICO della FUNZIONE TANGENTE

-3-
20/10/17



Notiamo come, man mano che x si avvicina a $\frac{\pi}{2}$:

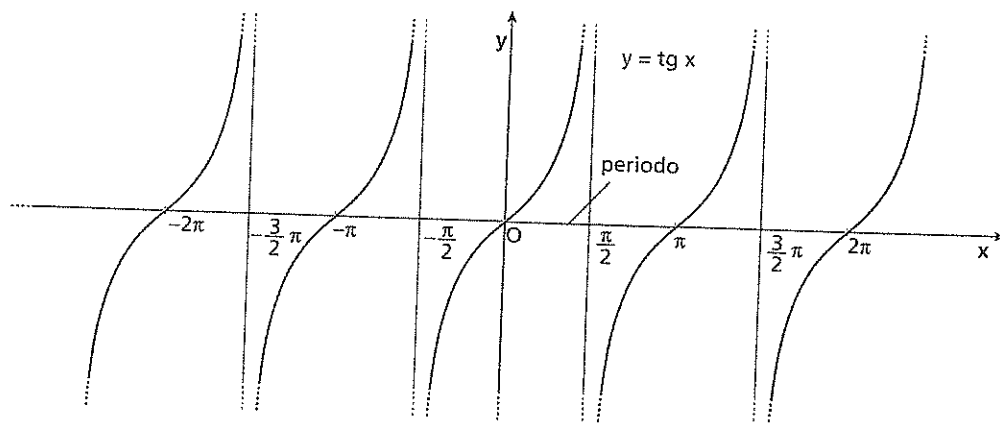
- con valori minori di $\frac{\pi}{2}$, il valore della funzione tende a diventare sempre più grande,
- con valori maggiori di $\frac{\pi}{2}$, il valore della funzione, che è negativo, tende a diventare sempre più grande in valore assoluto.

La funzione $f(x) = \tan x$ ha per dominio $\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
e $\text{Im} f = \mathbb{R}$.

È una funzione **DISPARI** (grafico simmetrico rispetto all'origine) e **periodica** di periodo $T = \pi$:

$$\tan(-x) = -\tan x \quad \forall x \in \text{dom} f$$

$$\tan(x + k\pi) = \tan x \quad \forall x \in \text{dom} f, \forall k \in \mathbb{Z}.$$



FORMULE

-4-
20/10/17

1) $-1 \leq \sin x \leq 1$, $-1 \leq \cos x \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

2) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

3) ADDIZIONE

$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$
--

4) SOTTRAZIONE si deducono da quelle di addizione ponendo $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \sin(-\beta) \cos \alpha = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\begin{aligned}\downarrow \\ \sin(-\beta) &= -\sin \beta \\ \cos(-\beta) &= \cos \beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) = \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

5) DUPLICAZIONE si deducono da quelle di addizione ponendo $\alpha = \beta$

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

6) PROSTAFERESI

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}$$

Si deducono dalle formule di addizione e sottrazione. Adesso per la 1^a

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta \quad \text{in cui ponendo } p = \alpha + \beta \text{ e } q = \alpha - \beta$$

si ottiene $\alpha = \frac{p+q}{2}$, $\beta = \frac{p-q}{2}$ e quindi

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

Ancora sulle PARABOLE

Data la parabola di base $y=x^2$ ($V(0,0)$, verso l'alto, apertura 1) possiamo ricostruire tutte le parabole di VERTICE un punto generico $V(x_v, y_v)$, aventi la stessa apertura e rivolte verso l'alto, considerando $y = (x-x_v)^2 + y_v$

tramite 2 spostamenti uno in orizzontale $x-x_v$ e uno in verticale $+y_v$ che portino il VERTICE in $V(x_v, y_v)$.

Allora l'eq.^{ue} $y = a(x-x_v)^2 + y_v$ è l'equazione generale di

una parabola : $V(x_v, y_v)$

$a > 0$ verso l'alto

$a < 0$ verso il basso

$|a|$ = apertura della parabola.

OSS. Se una parabola è data in questa forma possiamo subito leggere il VERTICE senza fare calcoli.

Viceversa, se si deve determinare l'equazione di una parabola ed è noto il vertice, questa equazione è più comoda (rispetto a $y = ax^2 + bx + c$).

ES. 1) $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 6$ è la parabola di $V(2, -6)$ rivolta verso

l'alto, $\cap y = 0$ se $(x-2)^2 = 12$ $x = 2 \pm 2\sqrt{3}$.

2) Determinate l'equazione della parabola di $V(-3, \frac{7}{2})$ che passa per $(0, \frac{3}{2})$.

$$y = a(x-x_v)^2 + y_v = a(x+3)^2 + \frac{7}{2}$$

per $(0, \frac{3}{2}) \rightarrow \frac{3}{2} = 9a + \frac{7}{2} \quad 9a = -2 \quad a = -\frac{2}{9}$

eq.^{ue} $y = -\frac{2}{9}(x+3)^2 + \frac{7}{2}$

CIRCONFERENZA

-6-

20/10/17

Def. Fissati un punto $C(x_c, y_c)$ detto CENTRO e un numero $R > 0$ detto RAGGIO la circonferenza di centro C e raggio R è il luogo dei punti che distano R da C .

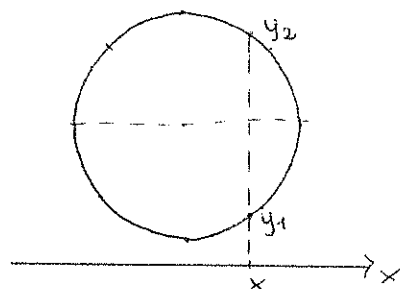
$$\text{Eq.}^{\text{ue}} \text{ dist}(P, C) = R \Leftrightarrow \sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2} = R \Leftrightarrow (x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = R^2$$

$$P = (x, y)$$

Nel caso particolare in cui $C(0,0)$ l'eq.^{ue} diventa $x^2 + y^2 = R^2$.

Una circonferenza NON è il grafico di una funzione quindi non possiede EQUAZIONE CARTESIANA perché ci sono dei valori di x a cui corrispondono 2 valori di y .

Tuttavia è possibile scrivere l'eq.^{ue} cartesiana della metà superiore di una circonferenza e della sua metà inferiore.



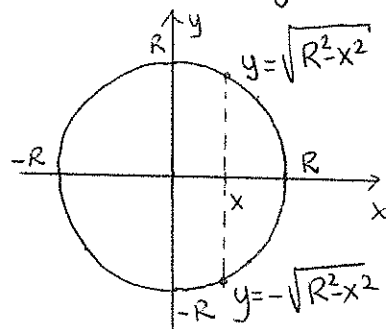
Partiamo dall'eq.^{ue} $x^2 + y^2 = R^2$ e cerchiamo di esplicitare y :

$$x \in [-R, R] \quad y^2 = R^2 - x^2 \geq 0$$

$$y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$$

+ sol.^{ue} $y \geq 0 \Rightarrow$ metà sup

- sol.^{ue} $y \leq 0 \Rightarrow$ metà inf



Nel caso generale basta spostare il $C(0,0)$ nel nuovo centro $C(x_c, y_c)$ per ottenere:

$$y = y_c + \sqrt{R^2 - (x-x_c)^2} \quad \text{eq.}^{\text{ue}} \text{ della metà superiore della circonferenza di}$$

$C(x_c, y_c)$ e raggio R

$$y = y_c - \sqrt{R^2 - (x-x_c)^2} \quad \text{per la metà inferiore.}$$

ES. $16x^2 + 16y^2 - 80x + 56y + 5 = 0$

-4-

$$x^2 + y^2 - 5x + \frac{7}{2}y + \frac{5}{16} = 0$$

20/10/17

$$(x - \frac{5}{2})^2 + (y + \frac{7}{4})^2 = -\frac{5}{16} + \frac{25}{4} + \frac{49}{16} = \frac{25}{4} + \frac{44}{16} = \frac{25}{4} + \frac{11}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

circonferenza di $C(\frac{5}{2}, -\frac{7}{4})$ e $R=3$

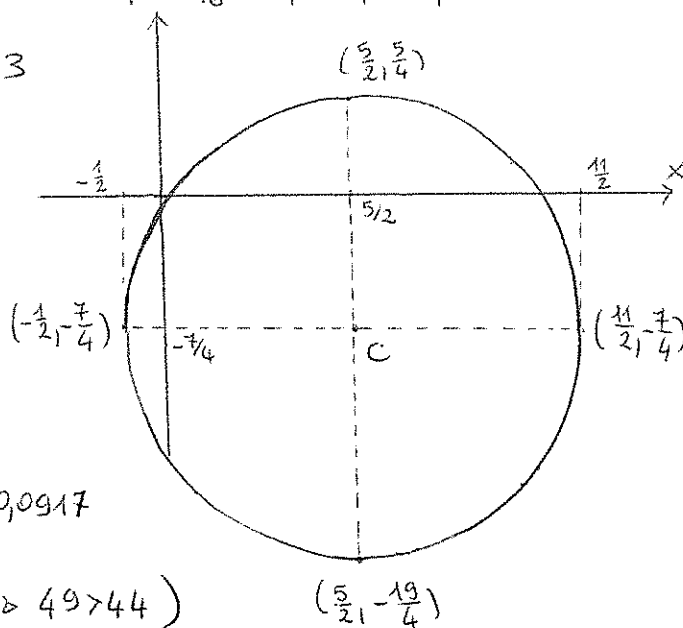
non passa per $(0,0)$ anche se
è vicinissima:

l'eq. della metà superiore

$$y = -\frac{7}{4} + \sqrt{9 - (x - \frac{5}{2})^2}$$

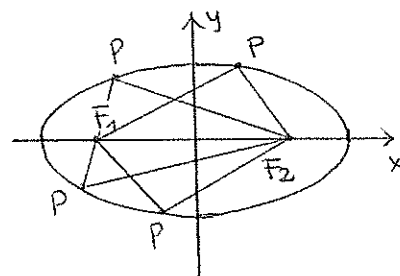
che per $x=0$ dà $y = -\frac{7}{4} + \frac{\sqrt{11}}{2} \approx -0,0917$

$$(-\frac{7}{4} + \frac{\sqrt{11}}{2} < 0? \quad \frac{7}{4} > \frac{\sqrt{11}}{2} \Leftrightarrow \frac{49}{16} > \frac{11}{4} \Leftrightarrow 49 > 44 \text{ vero}$$

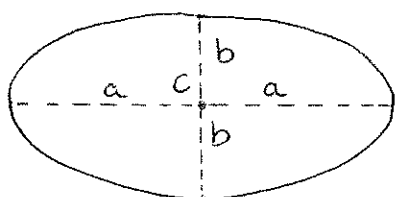


ELLISSE

Def. Fissati due punti F_1 e F_2 , detti fuochi, e un numero $K > 0$ l'ellisse è il luogo dei punti P tali che $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = K$, ossia per i quali si mantiene costante la somma delle distanze dai due fuochi.



Un'ellisse si caratterizza tramite un punto $C(x_c, y_c)$ detto CENTRO e due numeri positivi $a, b > 0$ detti SEMIASSI



a è il semiasse nella direzione dell'asse x e b nella direzione dell'asse y

EQ. $C(0,0)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

EQ. $C(x_c, y_c)$

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2} + \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1$$

ES. $4(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ $\frac{4}{9}(x-2)^2 + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

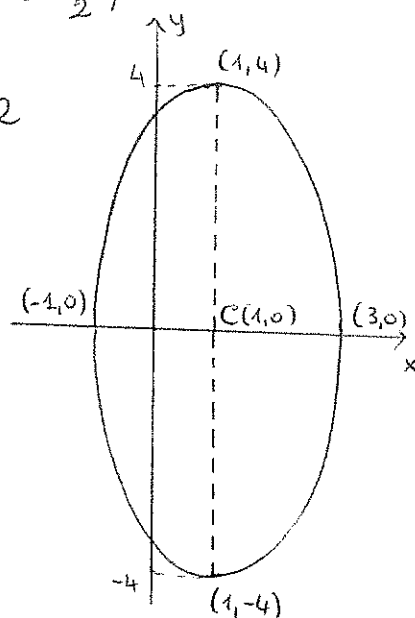
-8-

$\frac{(x-2)^2}{\frac{9}{4}} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ ellisse di $C(2, -1)$, $a = \frac{3}{2}$, $b = 3$

ES. $4x^2 + y^2 - 8x - 12 = 0$ $4(x^2 - 2x) + y^2 = 12$

$4(x-1)^2 + y^2 = 12 + 4 = 16$ $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

ellisse di $C(1, 0)$, $a = 2$, $b = 4$



IPERBOLE

L'iperbole può essere RIFERITA AGLI ASSI

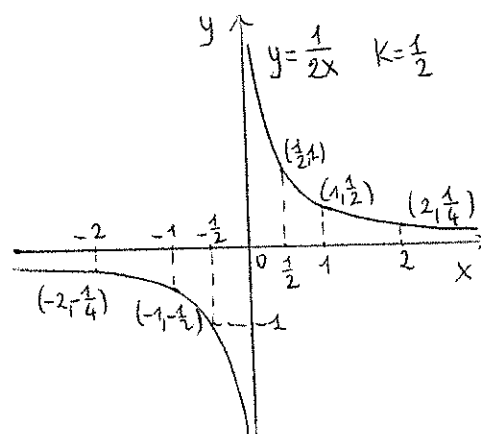
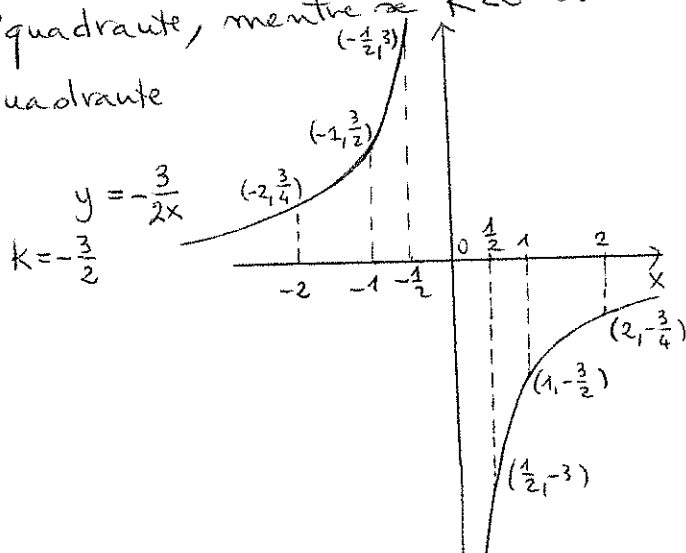
(cioè gli assi di riferimento x, y sono i suoi asintoti)

e in tal caso ha EQ.^{NE} $xy = k$ con $k \neq 0$.

OSS. Se $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ o $y = 0$ ritroviamo i due assi del sistema di riferimento)

Se $k \neq 0 \Rightarrow y = \frac{k}{x}$ è l'eq.^{NE} cartesiana ($k \neq 0 \Rightarrow x \cdot y \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ e $y \neq 0$).

Abbiamo già disegnato $y = \frac{1}{x}$; se $k > 0$ l'iperbole ha 2 RAMI nel 1° e nel 3° quadrante, mentre se $k < 0$ i due rami sono nel 2° e nel 4° quadrante



Invece si possono avere iperboli i cui asintoti sono le due bisettrici $y = \pm x$.

IPERBOLE RIFERITA ALLE BISETTRICI

-9-

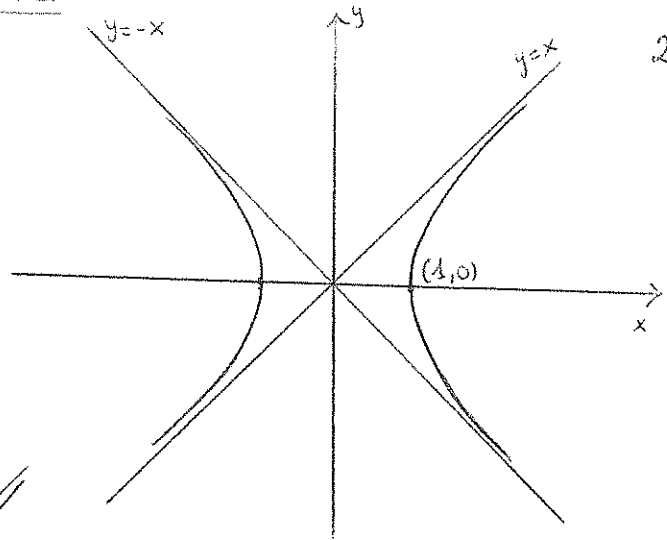
20/10/17

$$\boxed{x^2 - y^2 = 1}$$

$(\pm 1, 0) \in$ iperbole

$$x^2 = 1 + y^2 \geq 1$$

quindi non ci sono
punti con $-1 < x < 1$

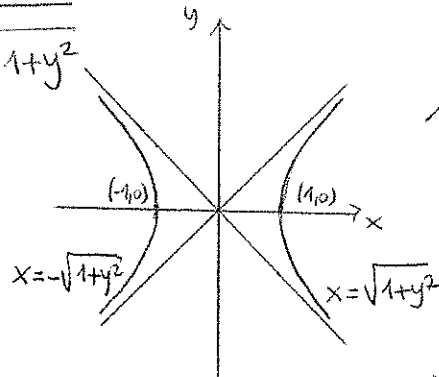


EQ.^{ue} dei vari tratti

$$x^2 = 1 + y^2 \quad x = \pm \sqrt{1 + y^2}$$

+ ramo $x > 0$

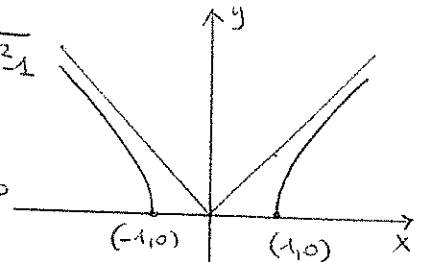
- ramo $x < 0$



$$y^2 = x^2 - 1 \quad x \leq -1 \text{ o } x \geq 1$$

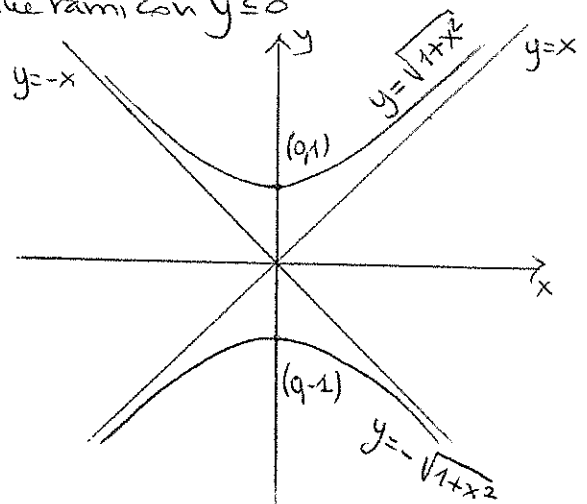
$$y = +\sqrt{x^2 - 1}$$

i due rami
con $y \geq 0$



$$y = -\sqrt{x^2 - 1}$$

i due rami con $y \leq 0$



$$\boxed{y^2 - x^2 = 1}$$

$(0, \pm 1) \in$ iperbole

$$y^2 = x^2 + 1 \geq 1$$

quindi non ci sono
punti con $-1 < y < 1$

E' l'inverso precedente in cui le
variabili x, y sono scambiate tra loro

$y = \pm \sqrt{1 + x^2}$ dà l'EQ.^{ue} dei due rami

con $y > 0$ e $y < 0$

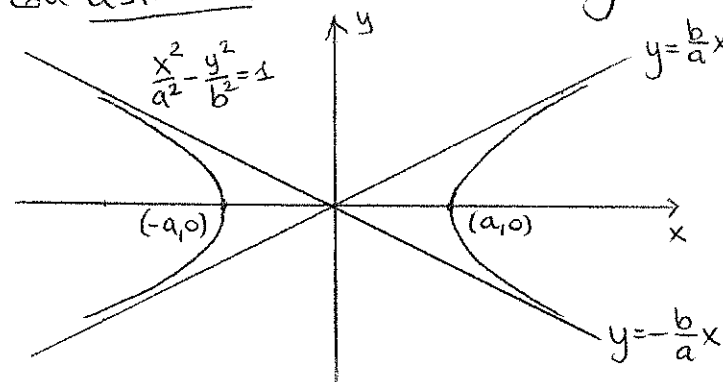
In generale $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ sono le EQ.^{ue} generali (implicit)

di un' iperbole con asintoti le due rette

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

$a > 0$
 $b > 0$

$(\pm a, 0) \in$ iperbole



ESERCIZIO

-10-

20/10/17

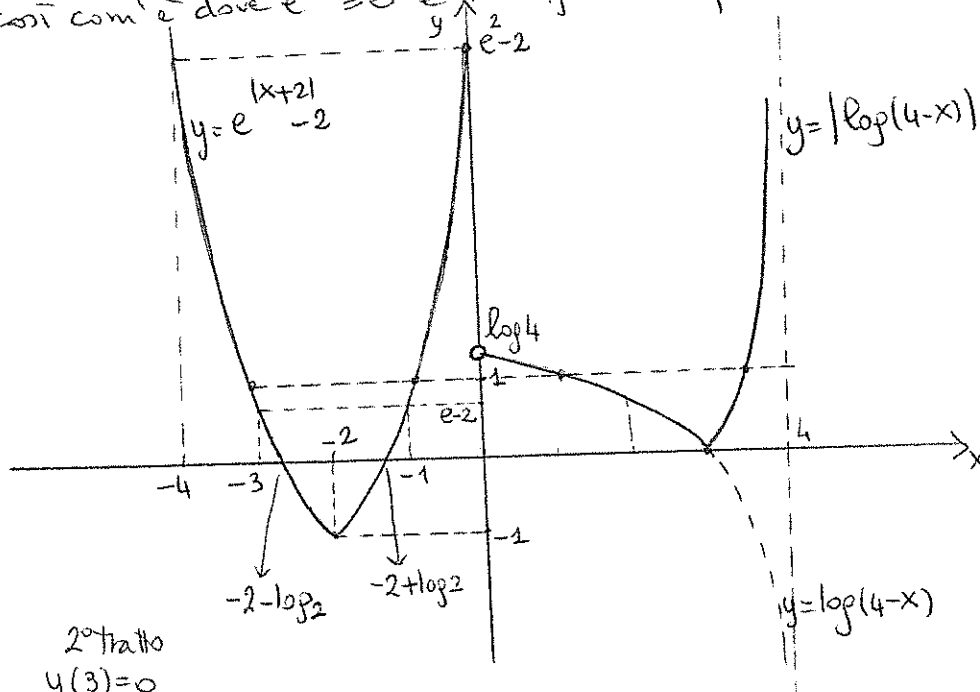
$$f(x) = \begin{cases} e^{|x+2|} - 2 & x \leq 0 \\ |\log(4-x)| & 0 < x < 4 \end{cases} \quad \text{dom } f =]-\infty, 4[$$

$y = e^{|x+2|} - 2$ è il grafico di $y = e^{|x|}$ ($y = e^{|x|} = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ e^{-x} & x < 0 \end{cases}$, dove

$y = e^{-x}$ è il simmetrico di $y = e^x$ rispetto all'axe y)

spostato a sinistra 2 e in basso di 2.

Il grafico $y = \log(4-x) = \log(-(x-4))$ è già stato disegnato la lezione scorsa ed è $y = \log(-x)$ (simmetrico del grafico $y = \log x$ rispetto all'axe y) spostato a destra di 4. Poi $y = |\log(4-x)|$ lascia il grafico così com'è dove è ≥ 0 e lo riflette rispetto all'axe x dove è negativo.



1° tratto

$$y(0) = e^2 - 2 \approx 5.4$$

$$y(-1) = e - 2 \approx 0.7$$

$$y(-2) = -1$$

2° tratto

$$y(3) = 0$$

$$y(2) = \log 2 \approx 0.69$$

$$y(0) = \log 4 = 2 \log 2 \approx 1.38$$

$$\text{Im } f = [-1, +\infty[$$

$$\begin{cases} y = e^{|x+2|} - 2 \\ y = 0 \end{cases} \quad e^{|x+2|} = 2 = e^{\log 2} \quad |x+2| = \log 2 \quad x+2 = \pm \log 2$$

$$x = -2 \pm \log 2 \quad \begin{matrix} x_1 \approx -1.31 \\ x_2 \approx -2.69 \end{matrix}$$

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \left\{ x = -2 \pm \log 3, x = 4 - e, x = 4 - \frac{1}{e} \right\}$$