

TRIGONOMETRIA

103) a) Disegnate il cerchio goniometrico ($C(0,0), R=1$), scegliete alcuni angoli a caso tra 0 e un angolo giro e indicate sul disegno chi sono il seno, il coseno e la tangente dell'angolo scelto.

b) Stabilite quanti gradi misura l'angolo $\alpha = 1$ radiante. Viceversa stabilite quanti radianti misura l'angolo $\alpha = 1^\circ$. Calcolate con la calcolatrice il seno e il coseno dei due angoli $\alpha = 1$ (radianti), $\beta = 1^\circ$ (quindi si deve stare attenti).

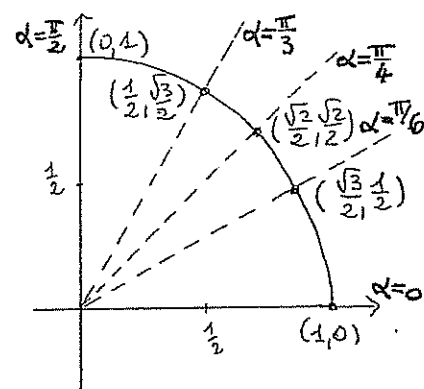
c) Scrivete in radianti i seguenti angoli:

$30^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 210^\circ, 180^\circ, 90^\circ, 315^\circ, 330^\circ$.

Scrivete in gradi i seguenti angoli in radianti:

$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5}{6}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{3}\pi, 2\pi$.

d) Considerate i valori di seno, coseno e tangente per gli angoli del 1° quadrante ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$). Imparatene i valori a memoria e controllateli sulla calcolatrice sia in gradi sia in radianti.



$\tan 0 = 0$ $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ $\tan \frac{\pi}{2}$ non esiste

Poi senza guardare la tabella calcolate

$\sin \frac{\pi}{4}$ $\cos \frac{\pi}{2}$ $\sin \frac{\pi}{6}$ $\cos \frac{\pi}{4}$ $\sin 0$ $\cos \frac{\pi}{6}$ $\cos \frac{\pi}{3}$ $\sin \frac{\pi}{2}$

e) ANGOLI nel 2°, 3°, 4° quadrante (i valori di seno, coseno e tangente si deducono dai valori degli angoli nel 1° quadrante, si veda la lezione del 6/10/17, pag. 1)

-90-
El. Mat.

Calcolate i ^{valori} di seno, coseno e tangente dei seguenti angoli: $\frac{7}{4}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi, 0, \frac{3}{4}\pi, \frac{11}{6}\pi, \pi, \frac{5}{3}\pi$

dopo averli disegnati sulla circonferenza goniometrica

f) ANGOLI maggiori di un angolo giro (si veda la lezione del 6/10/17 pag. 1)

Calcolate i valori di seno, coseno, tangente dei seguenti angoli

$\frac{7}{2}\pi, 3\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{9}{4}\pi, \frac{8}{3}\pi, \frac{17}{6}\pi, 4\pi, \frac{13}{3}\pi, \frac{11}{4}\pi, \frac{31}{6}\pi$

g) ANGOLI NEGATIVI (si veda la lezione del 6/10/17, pag. 2-3)

Calcolate i ^{valori} di seno, coseno e tangente dei

seguenti angoli, dopo averli indicati sulla circonf. goniometrica

$-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{2}{3}\pi, -\frac{3}{4}\pi, -\frac{5}{6}\pi, -\pi, -\frac{7}{6}\pi, -\frac{5}{4}\pi$
 $-\frac{4}{3}\pi, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{5}{3}\pi, -\frac{7}{4}\pi, -\frac{11}{6}\pi, -2\pi, -\frac{5}{2}\pi, -3\pi, -\frac{7}{2}\pi$

104) Calcolate, sempre DOPO AVER INDICATO l'angolo SULLA CIRCONF. GONOMETRICA:

$\sin \frac{\pi}{2} = \dots$ $\sin \left(\frac{7}{3}\pi \right) = \dots$ $\sin \left(\frac{5}{6}\pi \right) = \dots$

$\cos \pi = \dots$ $\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \dots$ $\cos \left(\frac{2}{3}\pi \right) = \dots$

$\sin (4\pi) = \dots$ $\sin \left(-\frac{4}{3}\pi \right) = \dots$ $\sin \left(\frac{7}{2}\pi \right) = \dots$

$\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \dots$ $\cos \left(\frac{10}{3}\pi \right) = \dots$ $\cos \left(\frac{5}{4}\pi \right) = \dots$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \dots$$

$$\sin\left(\frac{9}{4}\pi\right) = \dots$$

$$\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = \dots$$

$$\cos(-4\pi) = \dots$$

$$\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \dots$$

$$\cos\left(-\frac{7}{6}\pi\right) = \dots$$

$$\sin(-\pi) = \dots$$

$$\sin\left(\frac{11}{3}\pi\right) = \dots$$

$$\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \dots$$

$$\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = \dots$$

$$\cos\left(\frac{5}{2}\pi\right) = \dots$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \dots$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \dots$$

$$\sin\left(\frac{13}{6}\pi\right) = \dots$$

$$\sin\left(-\frac{7}{4}\pi\right) = \dots$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \dots$$

$$\cos\left(-\frac{7}{3}\pi\right) = \dots$$

$$\cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) = \dots$$

$$\cos\left(-\frac{5}{4}\pi\right) = \dots$$

$$\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \dots$$

$$\cos(3\pi) = \dots$$

$$\sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) = \dots$$

$$\cos(-3\pi) = \dots$$

$$\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \dots$$

$$\tan \pi = \dots$$

$$\tan\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \dots$$

$$\tan\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \dots$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \dots$$

$$\tan\left(-\frac{5}{4}\pi\right) = \dots$$

$$\tan\left(-\frac{7}{6}\pi\right) = \dots$$

105) Risolvete le seguenti equazioni trigonometriche per $0 \leq x \leq 2\pi$ (poi provate $\forall x \in \mathbb{R}$)

$$i) \sin x = 1 \quad ii) \cos x = \frac{1}{2} \quad iii) \tan x = -1 \quad iv) \cos^2 x = 1$$

$$v) \sin^2 x = \frac{1}{2} \quad vi) \sin x = 2 \quad vii) \tan x = -\sqrt{3} \quad viii) \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$ix) \sin x = -1 \quad x) \tan x = 0 \quad xi) \cos x = 0$$

106) Dite se le seguenti affermazioni sono vere o false (motivando la risposta):

$$i) \text{ se } \sin \alpha = 1, \text{ allora } \cos \alpha = 0$$

$$ii) \cos \alpha = 0 \text{ se e solo se } \sin \alpha = 1$$

$$iii) \text{ se } \tan \alpha = \sqrt{3}, \text{ allora } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$iv) \text{ se } \cos(2\alpha) = 0, \text{ allora } \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

vi) $\sin(10) > 0$

vii) $(\sin(10))^2 \geq 1$

viii) $\sin(10) = 0$

ix) $\sin(10) \cdot \cos(10) > 0$

x) l'eq.^{ne} $\tan x = 2$ è impossibile

xi) l'eq.^{ne} $\frac{\tan x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ è verificata per $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

xii) l'eq.^{ne} $\sqrt{\sin x - 3} = 1$ non ha soluzioni.

xiii) $\sin \frac{4}{3}\pi = -\cos \frac{\pi}{6}$

xiv) $\tan \frac{\pi}{4} = \tan \frac{5}{4}\pi$

xv) se $\tan \alpha = 2$ e $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$, allora $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

107) Un angolo α misura 3 radianti; giustificando la risposta, dite se $\sin \alpha$ è positivo o negativo, e se $\cos \alpha$ è positivo o negativo.

108) i) sia $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Sapendo che $\sin \alpha = \frac{7}{25}$, quanto vale $\cos \alpha$? Quanto vale $\tan \alpha$?

ii) Sia $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$. Sapendo che $\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, quanto vale $\cos \alpha$? Quanto vale $\tan \alpha$?

109) Usando le formule di addizione calcolate

i) $\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})$ ii) $\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6})$ iii) $\cos(\frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{4})$

OSS. Le formule di addizione ($\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$;

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$) sono le uniche da dover

imparare a memoria perché da esse si deducono quelle di sottrazione ponendo $\alpha + (-\beta)$ e di duplicazione se $\alpha = \beta$.

Occorre anche ricordarsi che $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \forall \alpha$, ma

questo è facile perché significa che il punto appartiene alla circonferenza di $C(0,0)$ e $R=1$.

-93-
El. Mat.

110) Siano dati 2 angoli α, β tali che :

$$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\beta \in [\pi, \frac{3}{2}\pi], \cos \beta = -\frac{12}{13}.$$

Calcolate $\sin(\beta - \alpha)$ e stabilite a quale intervallo ($[0, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, $[\pi, \frac{3}{2}\pi]$, $[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$) appartiene $(\beta - \alpha)$.

111) Risolvete le seguenti equazioni trigonometriche per $0 \leq x \leq 2\pi$ (poi provate anche per $x \in \mathbb{R}$):

i) $\sin x = \cos x$ ii) $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$

112) Risolvete le seguenti disequazioni trigonometriche per $0 \leq x \leq 2\pi$

i) $\sin x < \frac{1}{2}$ ii) $\tan x > \sqrt{3}$ iii) $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

iv) $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ v) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ vi) $\sin x > -\frac{1}{2}$

vii) $\tan x \leq 1$ viii) $\sin x > 0$ ix) $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin x < 1$

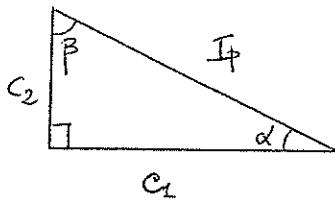
x) $\tan x < 0$ xi) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x \leq \frac{1}{2}$ xii) $-\sqrt{3} < \tan x < 1$

xiii) $3 \tan x < \sqrt{3}$ xiv) $\sin x < \sqrt{3} - \sin x$ xv) $0 < \sin x \leq 1$

xvi) $\sin^2 x \leq \frac{1}{2}$ xvii) $(\tan x)^2 \geq 1$.

113) RISOLUZIONE di un TRIANGOLO RETTANGOLO

In un triangolo rettangolo in cui sono noti gli angoli, la trigonometria permette di calcolare l'ipotenusa noto uno dei due cateti e uno dei due cateti nota l'ipotenusa o l'altro cateto.



Ogni cateto è uguale al prodotto dell'IPOTENUSA per il seno dell'angolo opposto oppure per il coseno dell'angolo adiacente:

$$c_1 = IP \cdot \cos \alpha = IP \cdot \sin \beta$$

$$c_2 = IP \cdot \cos \beta = IP \cdot \sin \alpha$$

Le stesse formule permettono di calcolare l'ipotenusa, noto il cateto.

Inoltre da queste formule si ricava $c_2 \cos \alpha = c_1 \sin \alpha$ e $c_2 \sin \beta = c_1 \cos \beta$ da cui

$$c_2 = c_1 \tan \alpha \quad \text{e} \quad c_1 = c_2 \tan \beta.$$

a) Il triangolo $\hat{A}BC$ è RETTANGOLO in A e l'angolo $\hat{A}BC = \frac{\pi}{3}$.

Determinate $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ sapendo che $\overline{BC} = 200 \text{ m}$.

b) Il triangolo $\hat{A}BC$ è RETTANGOLO in A e $\sin(\hat{A}BC) = \frac{1}{5}$.

Determinate $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ sapendo che $\overline{AB} = 3 \text{ m}$.

c) Il triangolo $\hat{A}BC$ è RETTANGOLO in B, $\overline{AC} = 20 \text{ m}$ e $\cos \hat{B}AC = \frac{2}{5}$.

Determinate $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e l'area di $\hat{A}BC$.

SOLUZIONI

El-Mat

-95-

103) a) Si veda la Lezione del 6/10/17 pag. 3.

b) $\sin(4 \text{ radianti}) = -0,7568 \dots$

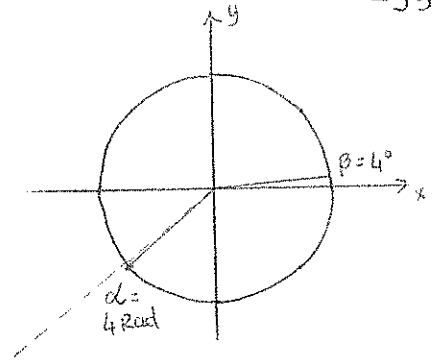
(*) $\cos(4 \text{ radianti}) = -0,6536 \dots$

$\sin(4^\circ) = 0,06975 \dots$

$\cos(4^\circ) = 0,99756 \dots$

L'angolo di 4° è molto piccolo $\Rightarrow$ il coseno è quasi 1 e il seno quasi 0.

L'angolo di 4 radianti è un angolo di $\approx 229,2^\circ$ appena $> \frac{5}{4}\pi$ e si trova nel 3° quadrante.



(*) $1 \text{ RADIANTE} = \frac{180}{\pi} \text{ GRADI} = 57,29577 \dots \approx 57,3^\circ$

essendo l'angolo corrispondente ad un arco con $L=R$ dev'essere appena meno di 60° (è un triangolo EQUILATERO con 1 LATO CURVO).

Viceversa $1 \text{ GRADO} = \frac{\pi}{180} \text{ RADIANTI} = 0,01745 \dots \text{ RADIANTI}$

c) $30^\circ \rightarrow \frac{\pi}{6}$ $120^\circ \rightarrow \frac{2}{3}\pi$

$135^\circ \rightarrow \frac{3}{4}\pi$ $210^\circ \rightarrow \frac{7}{6}\pi$ $180^\circ \rightarrow \pi$ $90^\circ \rightarrow \frac{\pi}{2}$ $315^\circ \rightarrow \frac{7}{4}\pi$

$330^\circ \rightarrow \frac{11}{6}\pi$

$\frac{\pi}{4} \rightarrow 45^\circ$ $\frac{\pi}{3} \rightarrow 60^\circ$ $\frac{5}{6}\pi \rightarrow 150^\circ$ $\frac{5}{4}\pi \rightarrow 225^\circ$

$\frac{4}{3}\pi \rightarrow 240^\circ$ $\frac{3}{2}\pi \rightarrow 270^\circ$ $\frac{5}{3}\pi \rightarrow 300^\circ$ $2\pi \rightarrow 360^\circ$

d) $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin 0 = 0$

$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $\sin \frac{\pi}{2} = 1$

e) $\odot \alpha = 0$ $\sin 0 = 0$ $\cos 0 = 1$ $\tan 0 = 0$ $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ $\sin \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$

$\pi \ominus \alpha = \pi$ $\sin \pi = 0$ $\cos \pi = -1$ $\tan \pi = 0$

$\tan \frac{2}{3}\pi = -\sqrt{3}$ $\frac{2}{3}\pi \odot$

$\odot \alpha = \frac{3}{2}\pi$ $\sin \frac{3}{2}\pi = -1$ $\cos \frac{3}{2}\pi = 0$ $\tan \frac{3}{2}\pi$ NON ESISTE $\alpha = \frac{3}{4}\pi$ $\sin \frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos \frac{3}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan \frac{3}{4}\pi = -1$ $\frac{3}{4}\pi \odot$

$$\alpha = \frac{11}{6}\pi \quad \text{Sen } \frac{11}{6}\pi = -\frac{1}{2} \quad \cos \frac{11}{6}\pi = +\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan \frac{11}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\odot \frac{11}{6}\pi$$

$$\alpha = \frac{7}{4}\pi \quad \text{Sen } \frac{7}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos \frac{7}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \tan \frac{7}{4}\pi = -1 \quad \odot \frac{7}{4}\pi$$

$$\alpha = \frac{5}{3}\pi \quad \odot \frac{5}{3}\pi \quad \text{Sen } \frac{5}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos \frac{5}{3}\pi = \frac{1}{2} \quad \tan \frac{5}{3}\pi = -\sqrt{3}$$

$$f) \quad \alpha = \frac{5}{2}\pi \quad \text{Sen } \frac{5}{2}\pi = 1 \quad \cos \frac{5}{2}\pi = 0 \quad \tan \frac{5}{2}\pi \text{ NON ESISTE} \quad \odot \frac{5}{2}\pi$$

$$\alpha = 3\pi \quad \text{Sen } 3\pi = 0 \quad \cos 3\pi = -1 \quad \tan 3\pi = 0 \quad \odot 3\pi$$

$$\alpha = \frac{11}{4}\pi \quad \text{Sen } \frac{11}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos \frac{11}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \tan \frac{11}{4}\pi = -1 \quad \odot \frac{11}{4}\pi$$

$$\alpha = \frac{9}{4}\pi \quad \text{Sen } \frac{9}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos \frac{9}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \tan \frac{9}{4}\pi = 1 \quad \odot \frac{9}{4}\pi$$

$$\alpha = \frac{7}{2}\pi \quad \text{Sen } \frac{7}{2}\pi = -1 \quad \cos \frac{7}{2}\pi = 0 \quad \tan \frac{7}{2}\pi \text{ NON ESISTE} \quad \odot \frac{7}{2}\pi$$

$$\alpha = \frac{8}{3}\pi \quad \text{Sen } \frac{8}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos \frac{8}{3}\pi = -\frac{1}{2} \quad \tan \frac{8}{3}\pi = -\sqrt{3} \quad \odot \frac{8}{3}\pi$$

$$\alpha = \frac{17}{6}\pi \quad \text{Sen } \frac{17}{6}\pi = \frac{1}{2} \quad \cos \frac{17}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan \frac{17}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \odot \frac{17}{6}\pi$$

$$\alpha = 4\pi \quad \text{Sen } 4\pi = 0 \quad \cos 4\pi = 1 \quad \tan 4\pi = 0 \quad \odot 4\pi$$

$$\alpha = \frac{13}{3}\pi \quad \text{Sen } \frac{13}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos \frac{13}{3}\pi = \frac{1}{2} \quad \tan \frac{13}{3}\pi = \sqrt{3} \quad \odot \frac{13}{3}\pi$$

$$\alpha = \frac{31}{6}\pi \quad \text{Sen } \frac{31}{6}\pi = -\frac{1}{2} \quad \cos \frac{31}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan \frac{31}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \odot \frac{31}{6}\pi$$

$$g) \quad \begin{array}{ccccccc} \odot -\pi/6 & \odot -\pi/4 & \odot -\pi/3 & \odot -\pi/2 & \odot -2/3\pi & \odot -3/4\pi \\ \text{Sen} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{Cos} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{Tan} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -1 & -\sqrt{3} & \text{NON ESISTE} & \sqrt{3} & 1 \end{array}$$

	$\odot -\frac{5}{6}\pi$	$\ominus -\pi$	$\odot -\frac{7}{6}\pi$	$\odot -\frac{5}{4}\pi$	$\odot -\frac{4}{3}\pi$	$\odot -\frac{3}{2}\pi$
sen	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	NON ESISTE

	$\odot -\frac{5}{3}\pi$	$\odot -\frac{7}{4}\pi$	$\odot -\frac{11}{6}\pi$	$\odot -2\pi$	$\odot -\frac{5}{2}\pi$	$\ominus -3\pi$
sen	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
tan	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	NON ESISTE	0

$\alpha = -\frac{7}{2}\pi$ Sen = 1 cos = 0 tan NON
ESISTE
 $\odot -\frac{7}{2}\pi$

104) $\odot \text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$ $\odot \text{sen } \frac{7}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\odot \text{sen } \frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2}$

$\cos \pi = -1$ $\ominus$ $\odot \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$ $\odot \cos(\frac{2}{3}\pi) = -\frac{1}{2}$

$\text{sen}(4\pi) = 0$ $\ominus$ $\text{sen}(-\frac{4}{3}\pi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\odot$ $\text{sen}(\frac{7}{2}\pi) = -1$ $\odot$

$\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$ $\odot$ $\cos(\frac{10}{3}\pi) = -\frac{1}{2}$ $\odot$ $\odot \cos(\frac{5}{4}\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{sen}(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\odot$ $\text{sen}(\frac{9}{4}\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\odot$ $\ominus \text{sen}(-\frac{5}{6}\pi) = -\frac{1}{2}$

$\cos(-4\pi) = 1$ $\ominus$ $\cos(\frac{5}{3}\pi) = \frac{1}{2}$ $\odot$ $\ominus \cos(-\frac{7}{6}\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen}(-\pi) = 0$ $\ominus$ $\text{sen}(\frac{11}{3}\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\odot$ $\odot \text{sen}(\frac{3}{4}\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos(-\frac{3}{2}\pi) = 0$ $\odot$ $\cos(\frac{5}{2}\pi) = 0$ $\odot$ $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\odot$

$\text{sen}(-\frac{\pi}{2}) = -1$ $\odot$ $\text{sen}(\frac{13}{6}\pi) = \frac{1}{2}$ $\odot$ $\odot \text{sen}(-\frac{7}{4}\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) &= 0 \quad \textcircled{1} & \cos\left(-\frac{7}{3}\pi\right) &= \frac{1}{2} \quad \textcircled{1} & \cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \textcircled{1} \\ \cos\left(-\frac{5}{4}\pi\right) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \textcircled{1} & \cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \textcircled{1} & \cos(3\pi) &= -1 \quad \textcircled{1} \\ \sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) &= 1 \quad \textcircled{1} & \cos(-3\pi) &= -1 \quad \textcircled{1} & \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \textcircled{1} \\ \tan \pi &= 0 \quad \textcircled{1} & \tan\left(\frac{4}{3}\pi\right) &= \sqrt{3} \quad \textcircled{1} & \tan\left(\frac{3}{4}\pi\right) &= -1 \quad \textcircled{1} \\ \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) &= -\sqrt{3} \quad \textcircled{1} & \tan\left(-\frac{5}{4}\pi\right) &= -1 \quad \textcircled{1} & \tan\left(-\frac{7}{6}\pi\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

105) i) $x = \frac{\pi}{2}$ ($x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$) ii) $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5}{3}\pi$ ($x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$)

iii) $x = \frac{3}{4}\pi, x = \frac{7}{4}\pi$ ($x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$) iv) $\cos x = \pm 1$ $\cos x = 1$ ha

sol. $x = 0, 2\pi$ $\cos x = -1$ ha sol. $x = \pi$ quindi

Sol. N^1 in $[0, 2\pi]$ $x = 0, x = \pi, x = 2\pi$

Sol. N^1 in $\mathbb{R}$: $x = k\pi$

v) $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ $\sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3}{4}\pi$

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \frac{5}{4}\pi, x = \frac{7}{4}\pi$

Sol. N^1 in $[0, 2\pi]$: $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$

Sol. N^1 in $\mathbb{R}$: $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

vi) $\sin x = 2$ IMPOSSIBILE $-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \forall x$

vii) $x = \frac{2}{3}\pi, x = \frac{5}{3}\pi$ ($x = \frac{2}{3}\pi + k\pi$)

viii) $x = \frac{5}{6}\pi, x = \frac{7}{6}\pi$ ($x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$)

ix) $x = \frac{3}{2}\pi$ ($x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$)

x) $x = 0, \pi, 2\pi$ ($x = k\pi$)

xi) $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3}{2}\pi$ ($x = \frac{\pi}{2} + k\pi$)

106) i) Se $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \quad (o \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \Rightarrow \cos x = 0$ Vero

ii) Falso $\cos x = 0$ se $x = \frac{3}{2}\pi$ in cui $\sin x = -1$

iii) Falso: può essere $x = \frac{4}{3}\pi$ con $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos x = -\frac{1}{2}$

iv) $\cos(2x) = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ allora $\sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

Falso

$$\downarrow$$

$$x = \frac{\pi}{4} \quad x = \frac{3}{4}\pi \quad x = \frac{5}{4}\pi \quad x = \frac{7}{4}\pi$$

in $[0, 2\pi]$

v) $10 \in]3\pi, 4\pi[\Rightarrow \sin(10) < 0$ Falso

vi) essendo $-1 \leq \sin x \leq 1$ si ha $(\sin x)^2 \leq 1$ quindi la disequazione è verificata solo se $(\sin(10))^2 = 1$ cioè

$\sin(10) = \pm 1$ ma 10 non è $\frac{\pi}{2}$, quindi falso
 $(10 \in]3\pi, 4\pi[)$

vii) essendo $10 \in]3\pi, 4\pi[$ $\sin(10) \neq 0$ Falso

viii) $\sin(10) \cdot \cos(10) > 0$ Vero $10 < \frac{\pi}{2}$ quindi

$10 \in 3^\circ$ quadrante $\sin(10) < 0$ e $\cos(10) < 0$, da cui il prodotto è > 0 .

ix) Falso $\tan x = k$ ha ∞ sol. in $\forall k \in \mathbb{R}$

x) $\tan x = \sqrt{3}$ VERA

xi) C.E. $\sin x - 3 \geq 0$ $\sin x \geq 3$ IMP. L'eq. non ha senso VERO

xii) $\sin \frac{4}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ VERO

xiii) $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ $\tan \frac{5}{4}\pi = 1$ Vero

-100-El. nat.

xiv) Falso sicuramente perché se $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \sin \alpha < 0$

107) Un angolo di 3 RADIANTI è appena più piccolo di π e $\in 2^{\circ} \text{quadrante}$

draute, quindi $\sin(3\text{RAD}) > 0$ $\cos(3\text{RAD}) < 0$ (con $\sin(3\text{rad})$ piuttosto piccolo)

108) i) $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ $\cos^2 \alpha = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}$

$\cos \alpha = \pm \frac{24}{25}$, ma essendo $\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ $\cos \alpha < 0 \Rightarrow$

$\cos \alpha = -\frac{24}{25}$ - Poi $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{7}{-24} = -\frac{7}{24}$

ii, come i) $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$ $\cos \alpha = \pm \frac{3}{\sqrt{10}}$

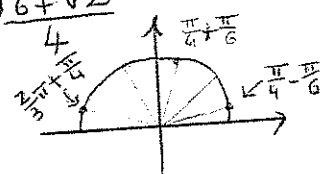
$\alpha \in]\frac{3}{2}\pi, 2\pi[\Rightarrow \cos \alpha > 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$\tan \alpha = -\frac{1}{3}$

109) $\cos(\frac{\pi}{4} + (-\frac{\pi}{6})) = \cos \frac{\pi}{4} \cos(-\frac{\pi}{6}) - \sin \frac{\pi}{4} \sin(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) =$
 $= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

$\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

$\cos(\frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos \frac{2}{3}\pi \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{2}{3}\pi \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$
 $= -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$



110) a pag. 102

111) i) $\sin x = \cos x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{5}{4}\pi$

in $\mathbb{R}$ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

ii) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2 x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$

$\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi \vee x = \frac{11}{6}\pi$

in $\mathbb{R}$ $x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k\pi$

112) i) $[0, \frac{\pi}{6}[\cup]\frac{5}{6}\pi, 2\pi[$

ii) $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{4}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi[$

iii) $[\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi]$

iv) $[0, \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{3}{4}\pi, 2\pi[$

v) $[0, \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{7}{4}\pi, 2\pi[$

$$vi) [0, \frac{7}{6}\pi[\cup]\frac{11}{6}\pi, 2\pi]$$

$$vii) [0, \frac{\pi}{4}] \cup]\frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi] \cup]\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$$

-101-
El. Nat.

$$viii)]0, \pi[$$

$$ix) [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi]$$

$$x)]\frac{\pi}{2}, \pi[\cup]\frac{3}{2}\pi, 2\pi[$$

(Se si considera
 $\tan x < 0$ se $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$)

$$y = \tan x \text{ su }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ si ha}$$

$$xi) [\frac{\pi}{3}, \frac{3}{4}\pi[\cup]\frac{5}{4}\pi, \frac{5}{3}\pi[$$

$$xii) [0, \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{2}{3}\pi, \frac{5}{4}\pi[\cup]\frac{5}{3}\pi, 2\pi]$$

$$xiii) \tan x < \frac{\sqrt{3}}{3} \quad [0, \frac{\pi}{6}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi[\cup]\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$$

$$xvi) -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sec x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi] \cup [\frac{7}{4}\pi, 2\pi]$$

$$xiv) 2 \sec x < \sqrt{2} \quad \sec x < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad [0, \frac{\pi}{3}[\cup]\frac{2}{3}\pi, 2\pi]$$

$$xv) \sec x \leq 1 \quad \sec x \leq 1 \text{ sempre vero}$$

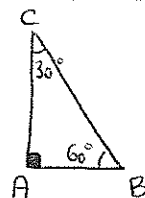
$$\sec x > 0 \quad]0, \pi[$$

$$xvii) \tan x \geq 1 \quad \text{ o } \tan x \leq -1 \quad [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{4}\pi] \cup [\frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi[\cup]\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi]$$

$$113) a) \text{ L'angolo } \hat{ACB} = \frac{\pi}{6} \quad \overline{AB} = \overline{BC} \sin \hat{ACB} \quad \overline{AC} = \overline{BC} \cos \hat{ACB}$$

$$\overline{AB} = 200 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 200 \cdot \frac{1}{2} = 100 \text{ m}$$

$$\overline{AC} = 200 \cos \frac{\pi}{6} = 200 \frac{\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3} \text{ m} \approx 173,2 \text{ m}$$



$$b) \overline{AB} = 3 \text{ m} \quad \overline{AC} = \overline{BC} \sin \hat{ABC}$$

$$\overline{AB} = \overline{BC} \cos \hat{ABC} \rightarrow \overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{\cos \hat{ABC}}$$

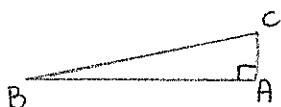
$$\sin \hat{ABC} = \frac{1}{5} \quad \cos^2 \hat{ABC} = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25} \quad \cos \hat{ABC} = \sqrt{\frac{24}{25}} \quad (\text{L'angolo } \in]0, \frac{\pi}{2}[) \Rightarrow \cos > 0$$

$$\Rightarrow \cos \hat{ABC} = \frac{2}{5}\sqrt{6}$$

$$\text{quindi } \overline{BC} = \frac{3}{\frac{2}{5}\sqrt{6}} = \frac{5}{4}\sqrt{6} \quad \text{ e } \quad \overline{AC} = \frac{5}{4}\sqrt{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\overline{BC} \approx 3,1 \text{ m}$$

$$\overline{AC} \approx 0,6 \text{ m}$$



SITUAZIONE REALE

$$c) \overline{AB} = \overline{AC} \cdot \cos(\widehat{BAC}) = 20 \cdot \frac{2}{5} = 8$$

$$\overline{BC} = \sqrt{20^2 - 8^2} = \sqrt{336} = \sqrt{2^4 \cdot 21} = 4\sqrt{21}$$

(per il Teorema di Pitagora)

$$\text{oppure } \overline{BC} = \overline{AC} \sin(\widehat{CAB}) = 20 \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} = 4\sqrt{21}$$

$$\text{perché } \sin^2(\widehat{CAB}) = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25} \rightarrow \sin(\widehat{CAB}) = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\text{area } \triangle ABC = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} = \frac{8 \cdot 4\sqrt{21}}{2} = 16\sqrt{21} \approx 73,3 \text{ m}^2$$



-102-

El.Mat.

l'angolo in $\hat{A}$ è appena più di $\frac{\pi}{3}$ e l'angolo in $\hat{C}$ appena meno di $\frac{\pi}{6}$

$$110) \sin(\beta - \alpha) = \sin\beta \cos(-\alpha) + \sin(-\alpha) \cdot \cos\beta = \sin\beta \cos\alpha - \sin\alpha \cos\beta$$

$$\text{se } \sin\alpha = \frac{4}{5} \text{ e } \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{se } \cos\beta = -\frac{12}{13} \text{ e } \beta \in [\pi, \frac{3}{2}\pi] \Rightarrow \sin\beta = -\sqrt{1 - \cos^2\beta} = -\sqrt{1 - \frac{144}{169}} = -\frac{5}{13}$$

$$\text{Allora } \sin(\beta - \alpha) = \left(-\frac{5}{13}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\right) - \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{15}{65} + \frac{48}{65} = \frac{33}{65}$$

$$\text{Essendo } \sin(\beta - \alpha) > 0 \Rightarrow \beta - \alpha \in]0, \pi[, \text{ ma essendo } \beta - \alpha > \frac{\pi}{2}$$

(perché $\beta > \pi$ e $\alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow \beta - \alpha > \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$) si ottiene che

$\beta - \alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Un'alternativa si può calcolare $\cos(\beta - \alpha)$

$$\text{ottenendo } \cos(\beta - \alpha) = -\frac{56}{65} < 0 \text{ da cui } \beta - \alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[.$$