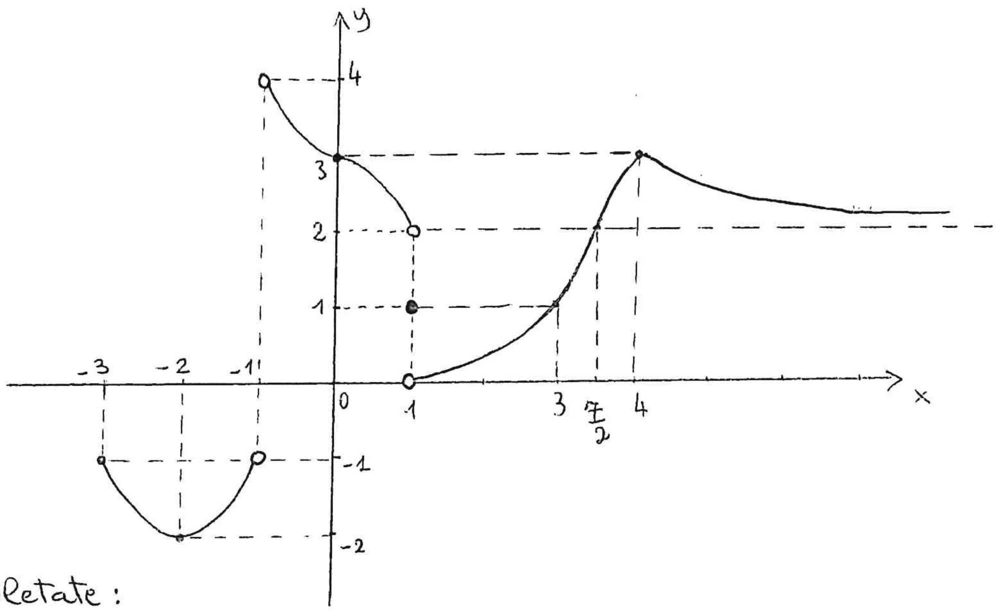
C.so ELEMENTI di MATEMATICA

TEST del 5 OTTOBRE 2018

NOME ....   COGNOME ....   ☐ Mat ☐ Fis

ES1) Considerate la funzione f che ha il seguente grafico:



Completate:

$\operatorname{dom} f = [-3,-1[\cup]-1,+\infty[$ $\operatorname{Im} f = [-2,-1]\cup]0,4[$

$f(1) = 1$ $f(-1) = \nexists \quad -1 \notin \operatorname{dom} f$ $f^{-1}(2) = \{\frac{7}{2}\}$

sol.ni dell'eq.ne $f(x)=0$: $\emptyset$ nessuna sol.ne $f([0,\frac{7}{2}]) =]0,3]$

FISICA numero delle sol.ni di $f(x)=k$ per $k\in[0,3]$:
$k=0$ nessuna sol.ne
$0<k<1$ 1 sol.ne
$k=1$ 2 sol.ni
$1<k\le 2$ 1 sol.ne
$2<k<3$ 3 sol.ni
$k=3$ 2 sol.ni

$x \in [-3,-1[\cup[1,\frac{7}{2}[$

MATEMATICA Sol.ni della disequazione $f(x)<2$: ....

ES.2) Considerate la funzione definita da:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} & 0 \le x \le 3 \\ \frac{13}{2} - \frac{3}{2}x & 3 < x \le 4 \end{cases}$$

a) Disegnate con precisione il grafico di f sul foglio a quadretti.

b) MATEMATICA ⊙ Scrivete una definizione di funzione iniettiva
⊙ Scrivete la negazione della definizione di funzione iniettiva data.
⊙ Stabilite se la funzione f è INIETTIVA, motivando la risposta.

c) Determinate la (o le) controimmagine(i) di $\frac{3}{2}$ - $f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = \left\{\frac{3}{2}, \frac{10}{3}\right\}$

ES.3) Le soluzioni della disequazione

$\sqrt{x^2-4} > 4-x$ sono ... $x \in]\frac{5}{2}, +\infty[$

ES.4) a) Determinate l'equazione della circonferenza avente ordinata del centro pari a -3, centro appartenente alla retta $\frac{1}{2}x - y - 2 = 0$ e passante per $(-2-\sqrt{2}, -3+\sqrt{2})$. Disegnate la circonferenza trovata.

CENTRO $C = (-2,-3)$ ... RAGGIO $R = 2$ ... equazione: ... $(x+2)^2+(y+3)^2=4$

b) L'insieme di equazione $9x^2+y^2 = 18x - 4y - 12$ rappresenta ... un'ellisse avente le seguenti caratteristiche: ... $C=(1,-2)$ semiassi $a = \frac{1}{3}$ $b=1$

c) Determinate l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli assi passante per $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e disegnatela.

Eq.ne: ... $xy=-2$

ES.5) MATEMATICA Considerate i predicati

$P(a,b) =$ " $a^2+b^2>0$ " $Q(a,b) =$ " $a \neq 0$ E $b \neq 0$ "

e la proposizione " $\forall a,b \in \mathbb{R}$ $P(a,b) \Rightarrow Q(a,b)$ " $= \mathcal{Q}$

a) Spiegate cosa si deve fare per dimostrare che una proposizione di questo tipo è falsa.

b) Dimostrate che $\mathcal{Q}$ è FALSA.

c) Scrivete la proposizione NON $\mathcal{Q}$ prima in forma teorica (con P, Q) e poi in forma esplicita.

d) Dimostrate che NON $\mathcal{Q}$ è VERA (senza utilizzare b))

e) Determinate un predicato $R(a,b)$ che corregga $Q(a,b)$ in modo che " $\forall a,b \in \mathbb{R}$ $P(a,b) \Rightarrow R(a,b)$ " $= \mathcal{B}$ sia VERA.

f) Dimostrate che $\mathcal{B}$ è VERA.

ES. 2) a) La funzione è definita a tratti:

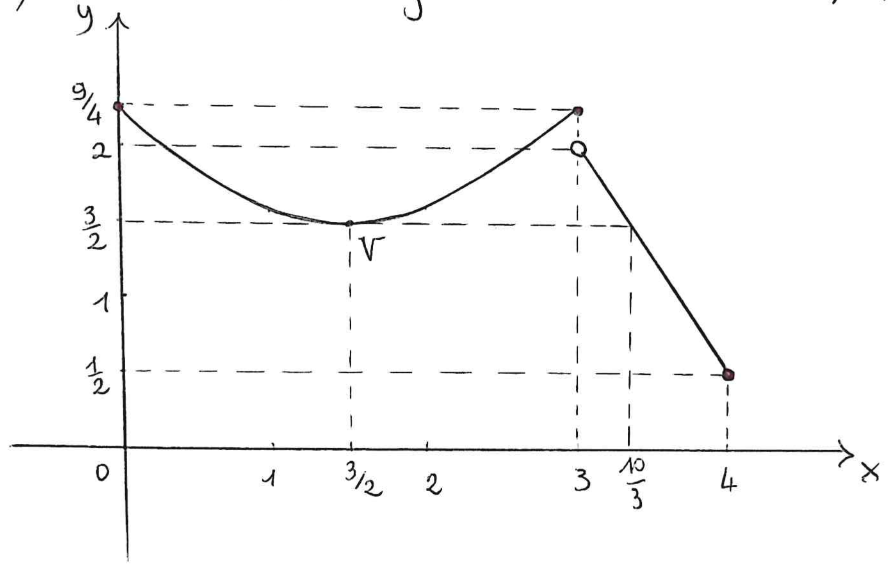
l'eq.^{ne} del 1° tratto è $y=\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$ ed è una PARABOLA

di $V\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ verso l'alto passante per $\left(0,\frac{9}{4}\right),\left(3,\frac{9}{4}\right),\left(1,\frac{19}{12}\right),\left(2,\frac{19}{12}\right)$

$\cap$ asse x ϕ

l'eq.^{ne} del 2° tratto è $y=\frac{13}{2}-\frac{3}{2}x$ ed è una retta di coeff. angolare

$m=-\frac{3}{2}$, ci interessa il segmento di estremi $(3,2)$ e $\left(4,\frac{1}{2}\right)$



b) ⊙ Def. Sia $f: A \to B$ una funzione; si dice che f è INIETTIVA se

$\forall a_1, a_2 \in A \quad f(a_1)=f(a_2) \Rightarrow a_1=a_2$.

⊙ NEGAZIONE $\exists\, a_1, a_2 \in A : \quad f(a_1)=f(a_2)$ E $a_1 \neq a_2$

⊙ la funzione del disegno NON È INIETTIVA in quanto ad es. ci sono 2 valori di x in cui $f(x)=2$ (in realtà per $k \in \left]\frac{3}{2}, 2\right[$ ci sono 3 controimmagini di k, mentre per $k=\frac{3}{2}$ o $k \in \left[2, \frac{9}{4}\right]$ ce ne sono due.

c) Ci sono 2 controimmagini di $y=\frac{3}{2}$: una è $x=\frac{3}{2}$, l'altra è un'ascissa della retta.

In $y=\frac{13}{2}-\frac{3}{2}x$ pongo $y=\frac{3}{2}$ e ricavo x: $\frac{3}{2}=\frac{13}{2}-\frac{3}{2}x \qquad \frac{3}{2}x=\frac{10}{2}=5$

$x=\frac{10}{3}$

$f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)=\left\{\frac{3}{2}, \frac{10}{3}\right\}$.

ESERCIZIO 3

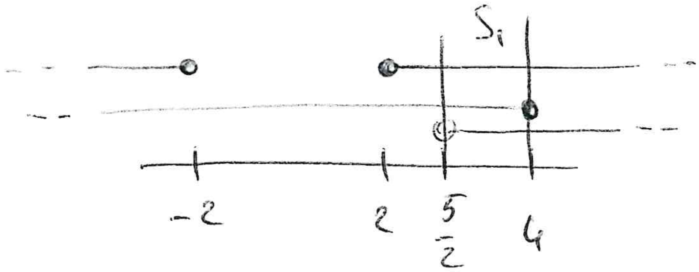
LE SOLUZIONI DI $\sqrt{x^2-4} > 4-x$ SONO

$$\begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ \left(\sqrt{x^2-4}\right)^2 > (4-x)^2 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2-4\geq 0 \\ 4-x<0 \end{cases}$$

RISOLVIAMO IL PRIMO SISTEMA:

$$\begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ x^2-4 > 16-8x+x^2 \end{cases} \quad \text{sse} \quad \begin{cases} x\leq -2 \ \vee \ x\geq 2 \\ x \leq 4 \\ 8x > 20 \end{cases}$$

$$\text{sse} \quad \begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ x \leq 4 \\ x > \frac{5}{2} \end{cases} \qquad \text{QUINDI} \quad S_1 = \left(\frac{5}{2}, 4\right]$$



IL SECONDO É SEMPLICEMENTE EQUIVALENTE A

$$\begin{cases} x\leq -2 \ \vee \ x \geq 2 \\ x > 4 \end{cases} \quad \text{che HA} \quad S_2 = (4, +\infty).$$

QUINDI LE SOLUZIONI DELLA DISEQ. IRRAZIONALE

SONO $S = S_1 \cup S_2 = \left(\frac{5}{2}, 4\right] \cup [4, +\infty) = \left(\frac{5}{2}, +\infty\right).$

ESERCIZIO 4

a) IL CENTRO DELLA CIRCONFERENZA DEVE APPARTENERE SIA ALLA RETTA $y=-3$ CHE A $\frac{1}{2}x-y-2=0$, CIOÈ SARÀ (L'UNICA) SOLUZIONE DEL SISTEMA

$$\begin{cases} y=-3 \\ \frac{1}{2}x-y-2=0 \end{cases} \quad \text{sse} \quad \begin{cases} y=-3 \\ \frac{1}{2}x+3-2=0 \end{cases} \quad \text{sse} \quad \begin{cases} y=-3 \\ x=-2 \end{cases}$$

QUINDI $(x_c, y_c)=(-2,-3)$. DATO CHE DOVRÀ PASSARE PER $(-2-\sqrt{2}, -3+\sqrt{2})$ IL RAGGIO SARÀ UGUALE ALLA DISTANZA DEL CENTRO DA QUESTO PUNTO, CIOÈ

$$R=\sqrt{(-2-(-2-\sqrt{2}))^2+(-3-(-3+\sqrt{2}))^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$$

INFINE, A QUESTO PUNTO L'EQUAZIONE SARÀ

$$(x-(-2))^2+(y-(-3))^2=4 \quad \text{cioè} \quad (x+2)^2+(y+3)^2=4$$

cioè

$$x^2+4x+4+y^2+6y+9=4 \quad \text{cioè}$$

$$x^2+4x+y^2+6y+9=0.$$

b) CERCHIAMO IL "CENTRO" E VERIFICHIAMO CHE SIA UN'ELLISSE

$$\begin{aligned} 9x^2+y^2-18x+4y+12 &= 9(x^2-2x)+y^2+4y+12 \\ &= 9[(x-1)^2-1]+(y+2)^2-4+12 \\ &= 9(x-1)^2+(y+2)^2-1 \end{aligned}$$

QUINDI $9x^2+y^2=18x-4y-12$ sse

$$9(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1 \qquad \text{CIOÈ}$$

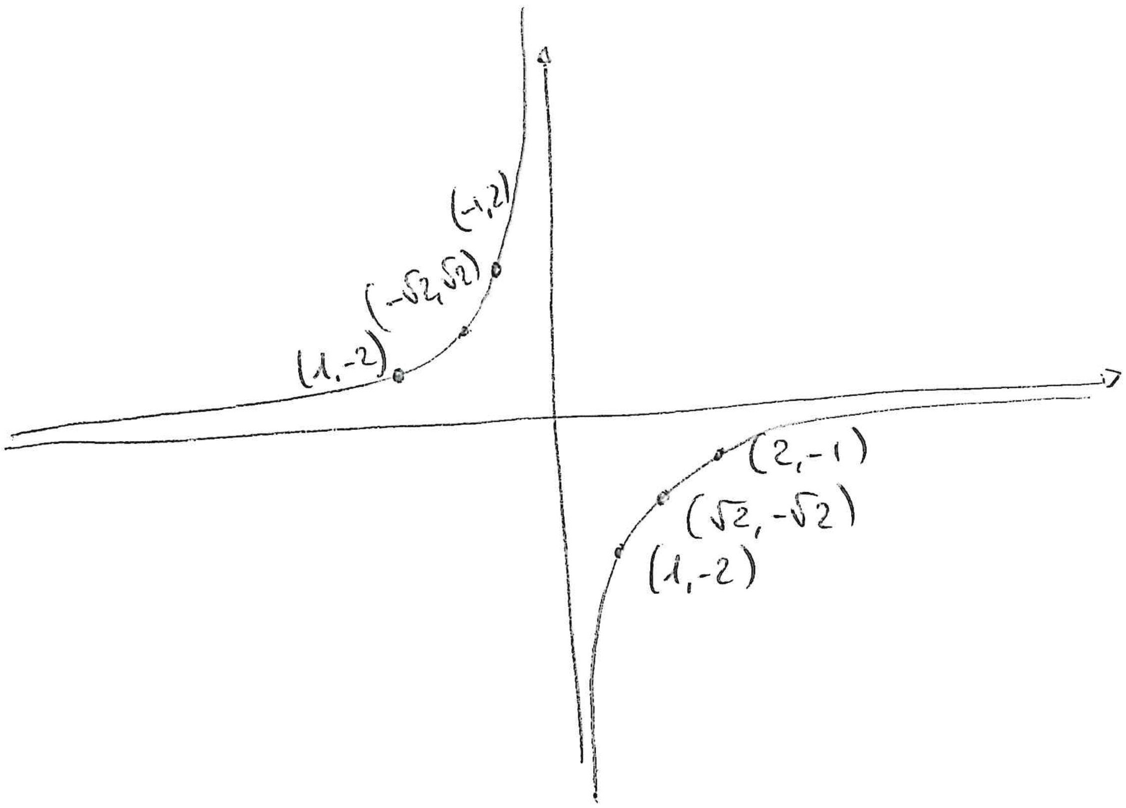
$$\frac{(x-1)^2}{(1/3)^2} + (y+2)^2 = 1 .$$

LA CURVA È EFFETTIVAMENTE UN'ELLISSE CON CENTRO $(1,-2)$, SEMIASSI $1/3$ e 1 ed ASSI PARALLELI AGLI ASSI COORDINATI

c) L'EQUAZIONE GENERICA DELL'IPERBOLE EQUILATERA RIFERITA AI PROPRI ASINTOTI È

$$xy = c \qquad \text{CON } c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

SE VOGLIAMO CHE PASSI PER $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ DOVRÀ ESSERE $c = \sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) = -2$. LA CURVA $xy = -2$ HA GRAFICO



Test 5 o # 18
Sol.ne 7

ES. 5)

a) Per dimostrare che una proposizione con $\forall a,b \in \mathbb{R}$ è FALSA basta TROVARE UN CONTROESEMPIO, cioè una coppia di valori (a,b) per le quali la proposizione risulti FALSA.

b) Q è falsa perchè ad esempio per $a=2$ E $b=0$ risulta

$$P(2,0) = \text{"}\underbrace{2^2>0}_{V}\text{"} \text{ VERA ma } Q(2,0) = \text{"}\underbrace{2\neq 0}_{V} \text{ E } \underbrace{0\neq 0}_{F}\text{"} \text{ FALSA}$$

c) NON Q $\Leftrightarrow \exists a,b \in \mathbb{R}$: $P(a,b)$ E NON $Q(a,b)$ (teorica)

$\Leftrightarrow \exists a,b \in \mathbb{R}$: $a^2+b^2>0$ E (NON ($a\neq 0$ E $b\neq 0$))

$\Leftrightarrow \exists a,b \in \mathbb{R}$: $a^2+b^2>0$ E ($a=0$ O $b=0$)

NON (P E Q) $\Leftrightarrow$ NON P O NON Q

d) NON Q è VERA perchè è verificata da $a=2$ E $b=0$ e trattandosi di una proposizione con $\exists a,b$ basta trovare un ESEMPIO in cui sia VERA:

$$\exists\, a=2,\, b=0 : \quad \underbrace{\underbrace{2^2>0}_{\text{Vera}} \text{ E } \underbrace{(\underbrace{2=0}_{F} \text{ O } \underbrace{0=0}_{V})}_{\text{Vera}}}_{\text{vera}}.$$

e) La proposizione diventa vera se sostituiamo $Q(a,b)$ con

$R(a,b) =$ " $a\neq 0$ O $b\neq 0$ ":

$$B = \text{"} \forall a,b \in \mathbb{R} \quad \underbrace{a^2+b^2>0}_{P(a,b)} \Rightarrow \underbrace{(a\neq 0 \text{ O } b\neq 0)}_{R(a,b)}.$$

f) Dim. per assurdo che NON $R(a,b) \Rightarrow$ NON $P(a,b)$

$\forall a,b \in \mathbb{R}$ NON $R(a,b) \Leftrightarrow$ NON ($a\neq 0$ O $b\neq 0$) $\Leftrightarrow$

NON (P O Q) $\Leftrightarrow$ NON P E NON Q

$\Leftrightarrow a=0$ E $b=0 \Rightarrow a^2+b^2=0^2+0^2=0$

$\Rightarrow a^2+b^2\leq 0 \Leftrightarrow$ NON $P(a,b)$.