C^{so}: ELEMENTI di MATEMATICA

TEST dell'8 OTTOBRE 2018 (C.L. in MATEMATICA)

ES1) Negate la seguente proposizione:

$$\forall x>0 \quad \exists y \in \mathbb{N} : \qquad P(x,y) \ \underline{E} \ Q(x,y)$$

Negazione: $\exists x>0 : \ \forall y \in \mathbb{N} \quad \text{NON}\,P(x,y) \ \underline{O} \ \text{NON}\,Q(x,y)$

ES2) Scrivete la definizione di INSIEME UNIONE di 2 insiemi dati A e B

$$A \cup B = \{x : x \in A \ \underline{o} \ x \in B\}$$

ES.3) Dimostrate che $\forall A, B, C$ insiemi

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

<u>Dim.</u> ... Dati due insiemi A e B $A = B \Leftrightarrow \forall x \quad x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

Dim. che $\forall x \quad x \in A \setminus (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$:

$x \in A \setminus (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \ \underline{E} \ x \notin (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \ \underline{E} \ (x \notin B \ \underline{o} \ x \notin C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \ \underline{E} \ x \notin B) \ \underline{o} \ (x \in A \ \underline{E} \ x \notin C) \Leftrightarrow (x \in A \setminus B) \ \underline{o} \ (x \in A \setminus C)$

Proprietà DISTRIB di $\underline{E}$ risp $\underline{o}$

$\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

ES. 4) Considerate i due predicati:

$P(x) =$ " $\sqrt{x^2-1} > x-1$ " $\quad Q(x) =$ " $x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} < 0$ "

a) Determinate per quali $x \in \mathbb{R}$ $P(x)$ risulti VERA e per quali $x \in \mathbb{R}$ $Q(x)$ risulti VERA.

b) Studiate la proposizione

" $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) \Rightarrow Q(x)$ " $= \mathcal{B}$

stabilendo se è VERA o FALSA e dimostrando quanto affermato.

c) Negate la proposizione $\mathcal{B}$ prima in forma teorica e poi in forma esplicita:

NON $\mathcal{B} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}$: $P(x)$ E NON $Q(x)$ (teorica)

NON $\mathcal{B} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}$: $(x \in]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[)$ E $x = 1$ (esplicita)

d) Stabilite se NON $\mathcal{B}$ è VERA o FALSA dimostrando quanto affermato.

<u>Risposte</u> a) $P(x)$ è VERA se $x \in]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$

$Q(x)$ è VERA se ... $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

(Svolgimento sul foglio a quadretti)

b) La proposizione $\mathcal{B}$ è ...VERA

(Svolgimento sul foglio a quadretti)

c) La proposizione NON $\mathcal{B}$ è ...FALSA

(Svolgimento sul foglio a quadretti)

ES.4) a) P(x) $\sqrt{x^2-1} > x-1 \iff \begin{cases} x^2-1\ge 0 \text{ (C.E.)} \\ x-1<0\end{cases}$ o $\begin{cases} x^2-1\ge 0 \text{ (C.E.)} \\ x-1\ge 0 \\ x^2-1>(x-1)^2\end{cases}$

$\iff \begin{cases} x\le -1 \text{ o } x\ge 1 \\ x<1\end{cases}$ o $\begin{cases} x\le -1 \text{ o } x\ge 1 \\ x\ge 1 \\ \cancel{x^2}-1>\cancel{x^2}-2x+1\end{cases}$

$\iff x\le -1$ o $\begin{cases} x\ge 1 \\ 2x>2\end{cases} \iff x\le -1$ o $x>1$

P(x) è VERA se $x\in\ ]-\infty,-1]\cup]1,+\infty[$

Q(x) $\quad \frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}>0 \quad x^2-2x+1>0 \quad (x-1)^2>0 \quad \forall x\ne 1$

Q(x) è VERA se $x\in\ ]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

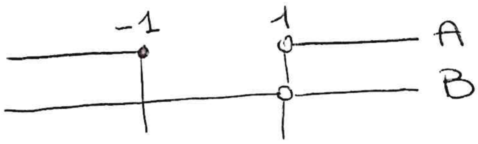
b) B = " $\forall x\in\mathbb{R} \quad x\in\ ]-\infty,-1]\cup]1,+\infty[\ \Rightarrow x\ne 1$ "

La proposizione B è VERA in quanto ogni numero nell'insieme $]-\infty,-1]\cup]1,+\infty[$ è diverso da 1.

Se chiamiamo $A=\ ]-\infty,-1]\cup]1,+\infty[$ e $B=\ ]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

B diventa " $\forall x\in\mathbb{R} \quad x\in A\Rightarrow x\in B$ " $\iff A\subseteq B$ che è VERA

in quanto

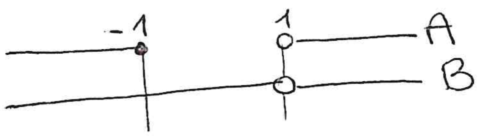


$A\subseteq B$.

d) NON B è FALSA in quanto nessun numero reale x può essere contemporaneamente uguale a 1 e appartenere a $]-\infty,-1]\cup]1,+\infty[$.

Infatti NON B $\iff \exists x : x\in A$ e $x\notin B \iff A\setminus B\ne\emptyset$

ma



$A\setminus B=\emptyset$ perchè essendo $A\subseteq B$ tutti i punti di A appartengono anche a B.