COGNOME	______________________	NON SCRIVETE QUI	
NOME	______________________		
MATRICOLA	└┴┴┴┴┴┴┘	1 | 2 | 3 | 4 | 5	
CORSO SEGUITO	Mat Fis		

UNIVERSITÀ DI PARMA — C.L. in Matematica e Fisica

ESAME DI ELEMENTI di MATEMATICA

A.A. 2018-2019 — PARMA, 12 OTTOBRE 2018

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo **in stampatello** cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di un'ora e quarantacinque minuti. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

Svolgete prima i calcoli in brutta, poi svolgete ordinatamente gli esercizi su un altro foglio protocollo a quadretti, infine **copiate le sole risposte** su questo foglio.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo. Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta**.

0) **PARTE PRELIMINARE** Completate:

a) Se $f(x) = \dfrac{1}{2}\log((x-1)^2) + \sqrt{\dfrac{x^2}{2-x^2}}$

allora:

$\operatorname{dom} f = \dots\ ]-\sqrt{2}, 1[\, \cup\,]1, \sqrt{2}[$ Svolgim. a pag. 4

b) Dati i due insiemi $A = [-\frac{7}{5}, 10-4\sqrt{5}] \cup [4, 10+4\sqrt{5}]$, $B = [-\sqrt{2}, \frac{2}{3}] \cup]6, +\infty[$, allora:

$A \cup B = [-\sqrt{2}, 10-4\sqrt{5}] \cup [4, +\infty[$ $\quad A \setminus B = \dots]\frac{2}{3}, 10-4\sqrt{5}] \cup [4, 6]$

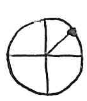
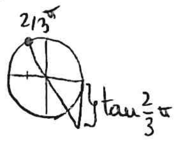
(sono richiesti i calcoli di tutti i confronti necessari, senza utilizzare i numeri decimali).

c) $3x^2 - 2x + 7 > 0 \iff \dots \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad (\Delta = -80 < 0 \quad \longrightarrow x)$

$\sqrt{a^2 - b^2} = a - b$ è VERA o FALSA perché ad es. se $a = 5$ e $b = 3$ $\quad \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4 \neq 5 - 3 = 2$

$\sqrt{f(x)} < g(x) \iff \dots \begin{cases} f(x) \geq 0 & \text{(C.E.)} \\ g(x) \geq 0 & \text{(affinché possano esserci sol.ni)} \\ f(x) < (g(x))^2 \end{cases}$

$|x| = 2 - e \iff$ nessuna sol.ne perché $2 - e < 0$ essendo $e \simeq 2{,}7$

d) $\cos(\frac{11}{6}\pi) = \dots \frac{\sqrt{3}}{2}$  $\operatorname{sen}(-\frac{7}{4}\pi) = .\frac{\sqrt{2}}{2}$  $\tan(\frac{2}{3}\pi) = \dots -\sqrt{3}$ 

(è richiesto il disegno di ogni angolo).

e) $\left[e^{3\log 3 - \log 9} - 8\,(\log e^4)^{-3}\right] = \dots \boxed{\frac{23}{8}}$ Svolgim. a pag. 4

f) La retta r per $(2,1)$ e $(0,4)$ ha equazione $y = -\frac{3}{2}x + 4$, coefficiente angolare $m = -\frac{3}{2}$ e ordinata all'origine $q = 4$

Svolgim. a pag. 5

La retta passante per l'origine e parallela alla retta r ha equazione $y = -\frac{3}{2}x$
mentre la retta passante per l'origine e perpendicolare alla retta r ha equazione $y = \frac{2}{3}x$

g) Determinate e disegnate tutte le soluzioni $x \in [0\,,\,2\pi]$ dell'equazione

$(\operatorname{sen} x + 1)(2\operatorname{sen} x \cos x + \sqrt{3}\cos x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}$ o $x = \frac{3}{2}\pi$ o $x = \frac{4}{3}\pi$ o $x = \frac{5}{3}\pi$

h) $(-x - 1)\cdot(3 - \log_2(2 - x)) < 0 \iff x \in]-\infty, -6[\, \cup\,]-1, 2[$

i) Disegnate sul foglio a quadretti con precisione (dominio, equazione del grafico, tutti i passaggi necessari per la costruzione, intersezioni con gli assi coordinati, punti significativi, asintoti) il grafico delle seguenti funzioni:

Svolgim. a pag. 6

$$f(x) = -e^{x+2}, \qquad g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 4x - 9\,.$$

Svolgimento a pag. 7

1) Risolvete la disequazione $\left|\frac{1}{2}x^2 - 5x + 4\right| \le \frac{1}{4}x^2 - 1\,.$ SOL.^{ne} $x \in [6, 10+4\sqrt{5}]$

(Si sconsiglia di studiare il segno dell'argomento del valore assoluto).

---

2) a) Disegnate con precisione sul foglio a quadretti il grafico della seguente funzione (in parte disegnata nella parte preliminare punto i)), specificando l'equazione del grafico di ogni tratto, tutti i passaggi necessari per la costruzione di ogni tratto, le coordinate dei punti di intersezione con gli assi cartesiani, gli asintoti e eventuali altri punti significativi:

Svolgim. a pag 7-8

$$f(x) = \begin{cases} 4 - e^{x+2} & \text{se } x \le 0 \\ x - 2 & \text{se } 0 < x < 3 \\ -\frac{1}{3}x^2 + 4x - 9 & \text{se } 3 \le x \le 12 \end{cases}$$

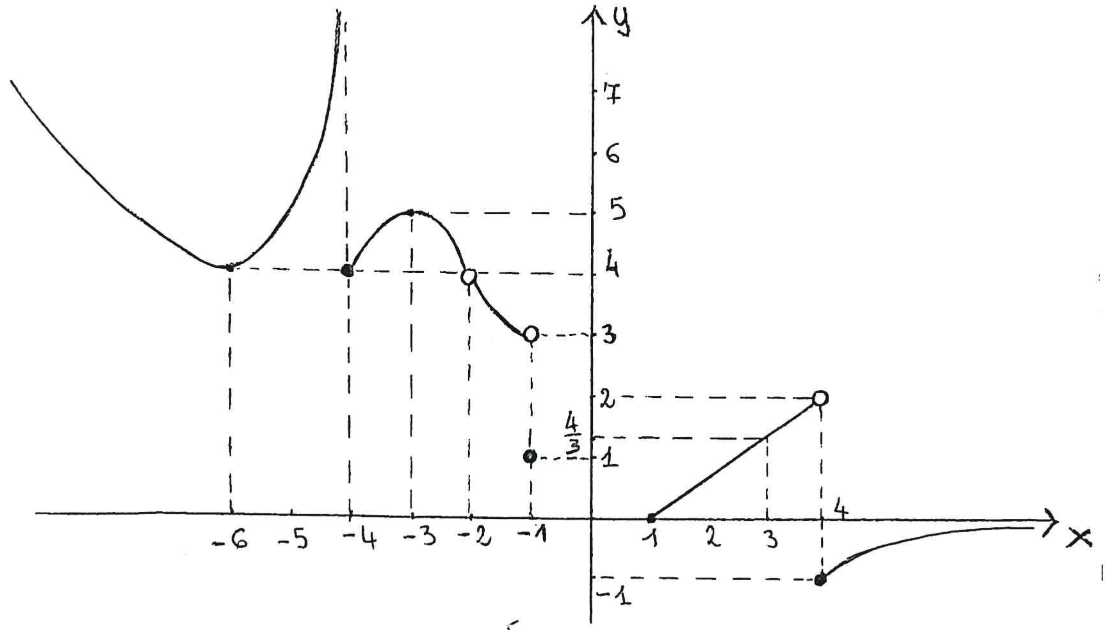
dom $f =]-\infty, 12]$ Imm $f = [-9, 4[$

$f(-2-\log 2) = 7/2$ $f^{-1}(0) = \{-2+\log 4,\ 2,\ 3,\ 9\}$

$x = -2 - \log 2 < 0 \Rightarrow$
$f(-2-\log 2) = 4 - e^{-2-\log 2+2} = 4 - e^{-\log 2} = 4 - e^{\log 1/2} = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

b) Disegnate con precisione il grafico della funzione $g(x) = |f(x)|$.

3) Considerate la funzione f che ha il seguente grafico:



dom f = ...$]-\infty,-2[\cup]-2,-1]\cup[1,+\infty[$ Imm f = ... $[-1,2[\cup]3,+\infty[$

$f(-1) = \dots 1 \dots$ $f(-2) = \dots \nexists \dots$ $f^{-1}(4) = \dots \{-6,-4\}$

$-2 \notin \mathrm{dom} f$

Determinate il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$ per $k \in [3,5]$: $k=3$ 0 sol.ni; $k\in]3,4[$ 1 sol.ne; $k=4$ 2 sol.ni; $k\in]4,5[$ 4 sol.ni; $k=5$ 3 sol.ni

La funzione f è strettamente crescente su $[1,4]$: VERO o FALSO

(motivate la risposta sul foglio a quadretti). $x_1=1$, $x_2=4$ $x_1<x_2$ ma $f(x_1)=0>f(4)=-1$

(FISICA) Determinate $f(\,]-2,-1]\cup[1,3]\,) = \dots [0,\frac{4}{3}]\cup]3,4[$

(MATEMATICA) Le soluzioni della disequazione $\frac{4}{3} \leq f(x) < 4$ sono ... $x\in]-2,-1[\cup[3,4[$

(MATEMATICA) Scrivete sul foglio a quadretti la definizione di funzione strettamente crescente per una funzione $f : \mathrm{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si vedano le lezioni

---

Svolgimento a pag. 9

4) L'insieme di equazione $3x^2 + y^2 + 6x - 4y - 2 = 0$ rappresenta ... un'ellisse

avente le seguenti caratteristiche: ...... $C(-1,2)$ semiassi $a=\sqrt{3}$ $b=3$

Disegnate con precisione l'insieme trovato sul foglio a quadretti. eq.ne $\frac{(x+1)^2}{3}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$

---

5) **(FISICA - FACOLTATIVO)** Disegnate con precisione sul foglio a quadretti il grafico della funzione $\mathbf{f(x) = 2 + e^{-|x|}}$, specificando l'equazione del grafico, tutti i passaggi necessari per la costruzione, le coordinate dei punti di intersezione con gli assi cartesiani, gli asintoti e eventuali altri punti significativi.

Poi determinate le controimmagini di $\frac{5}{2}$. Svolgimento a pag. 9

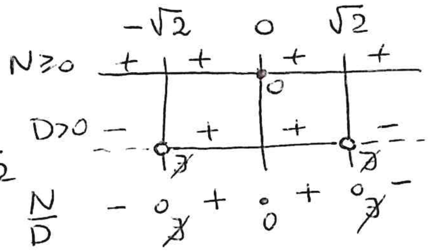
es.0) a) $\text{dom} f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ (x-1)^2 > 0, \ 2 - x^2 \neq 0, \ \dfrac{x^2}{2-x^2} \geq 0 \right\}$

$$\begin{cases} (x-1)^2 > 0 \\ x^2 \neq 2 \\ \dfrac{x^2}{2-x^2} \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq \pm\sqrt{2} \\ x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\end{cases} \qquad \text{dom} f =]-\sqrt{2}, 1[\cup]1, \sqrt{2}[$$

$\hookrightarrow \dfrac{N}{D} \geq 0 \qquad N \geq 0 \quad x^2 \geq 0 \quad \forall x$

$x^2 = 0 \quad x = 0$

$D > 0 \quad 2 - x^2 > 0 \quad x^2 < 2 \quad -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$



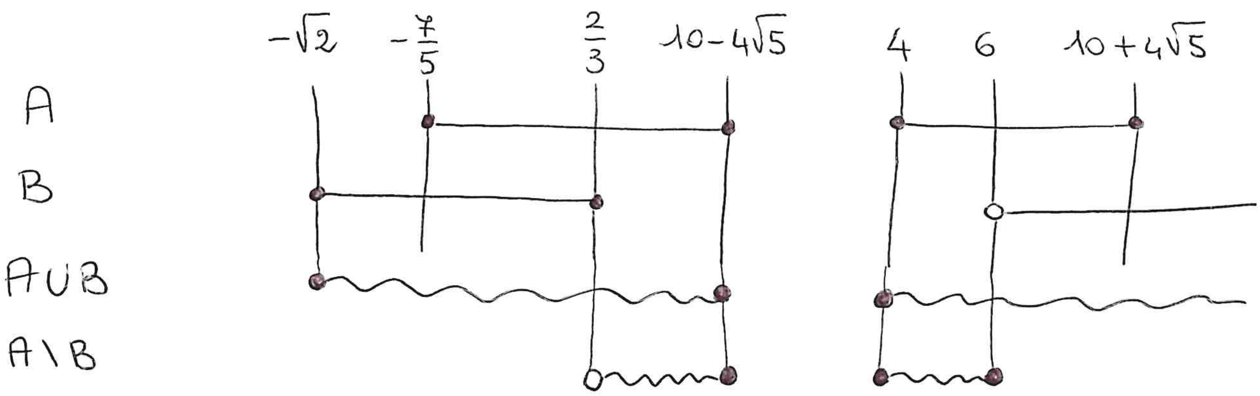
b) i numeri negativi sono $-\frac{7}{5}$ e $-\sqrt{2}$: $-\sqrt{2} < -\frac{7}{5}$ perchè $\sqrt{2} > \frac{7}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{2} > 7 \Leftrightarrow 50 > 49$ vero. $10 - 4\sqrt{5} > 0 \Leftrightarrow 10 > 4 \cdot \sqrt{5} \Leftrightarrow 100 > 80$ vero

E' ovvio che $4 < 6 < 10 + 4\sqrt{5}$. Confrontiamo $\frac{2}{3}$ e $10 - 4\sqrt{5}$:

$\frac{2}{3} < 10 - 4\sqrt{5} \Leftrightarrow 4\sqrt{5} < \frac{28}{3} \Leftrightarrow \cancel{12}^{3}\sqrt{5} < \cancel{28}^{7} \Leftrightarrow 3\sqrt{5} < 7 \Leftrightarrow 45 < 49$.

Inoltre $10 - 4\sqrt{5} < 2$ ($4\sqrt{5} > 8 \Leftrightarrow 80 > 64$). Allora



$A \cup B = [-\sqrt{2}, 10 - 4\sqrt{5}] \cup [4, +\infty[$

$A \setminus B =]\frac{2}{3}, 10 - 4\sqrt{5}] \cup [4, 6]$

$\log a - \log b = \log \frac{a}{b} \quad \forall a > 0, b > 0$

c) $\left[e^{\log 27 - \log 9} - 8 (4)^{-3} \right] = \left[e^{\log \frac{27}{9}} - 8 \cdot \frac{1}{64} \right] = \left[3 - \frac{1}{8} \right] = \frac{23}{8}$

$\hookrightarrow n \log a = \log a^n \quad a > 0$

$\log e^x = x \quad \forall x$

$e^{\log x} = x \quad \forall x > 0$

$\frac{27}{9} = 3$

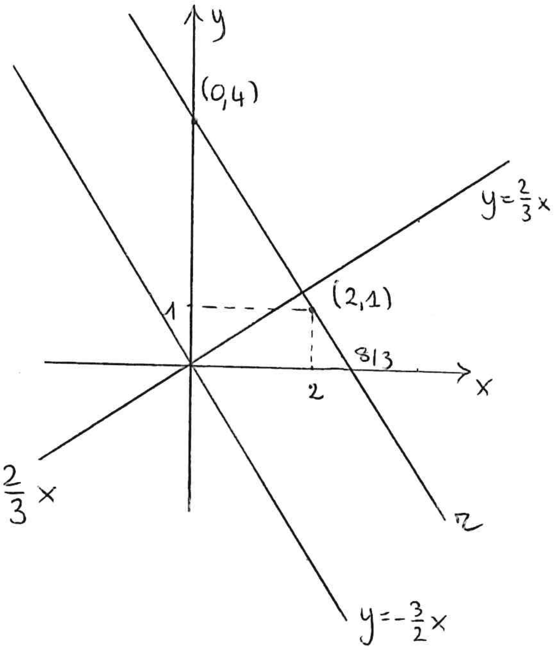
f) $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{3}{2}$

eq.^{ne} $y = 4 - \frac{3}{2}x$ $\quad y = -\frac{3}{2}x + 4$

retta // per (0,0) $y = mx$ con $m = -\frac{3}{2}$

$y = -\frac{3}{2}x$

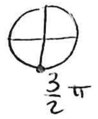
retta $\perp$ per (0,0) $m_\perp = \frac{2}{3}$ $\quad y = \frac{2}{3}x$

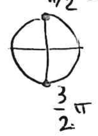


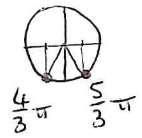
g) Per la legge dell'annullamento del prodotto

$\iff \underbrace{\operatorname{sen} x + 1 = 0}_{}$ (sen$x = -1$) $\;\underline{o}\;$ $\cos x = 0$ $\;\underline{o}\;$ $2\operatorname{sen} x + \sqrt{3} = 0$ (sen$x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$)

$\iff x = \frac{3}{2}\pi$ $\;\underline{o}\;$ $\left(x = \frac{\pi}{2} \;\underline{o}\; x = \frac{3}{2}\pi\right)$ $\;\underline{o}\;$ $\left(x = \frac{4}{3}\pi \;\underline{o}\; x = \frac{5}{3}\pi\right)$







Sol.^{ni} = $\left\{ x = \frac{\pi}{2},\ x = \frac{3}{2}\pi,\ x = \frac{4}{3}\pi,\ x = \frac{5}{3}\pi \right\}$

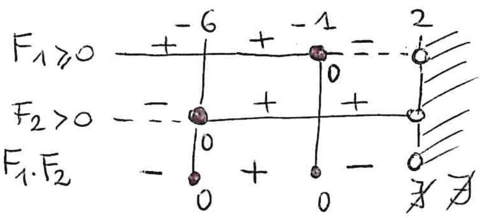
h) $F_1 = (-x-1)$ $\qquad F_2 = 3 - \log_2(2-x)$ $\qquad$ C.E. $2 - x > 0$ $\boxed{x<2}$

$F_1 \geq 0$ $\quad -x-1 \geq 0$ $\quad x \leq -1$

$F_1 = 0$ se $x = -1$

$F_2 \geq 0$ $\quad -6 \leq x < -2$

$F_2 = 0$ se $x = -6$



$\downarrow$

$\begin{cases} 3 - \log_2(2-x) \geq 0 \\ x < 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \log_2(2-x) \leq 3 = \log_2 2^3 = \log_2 8 \\ x < 2 \end{cases}$

$\underset{\log_2 x \nearrow}{\iff} \begin{cases} (2-x) \leq 8 \\ x < 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -6 \\ x < 2 \end{cases}$ $\qquad F_2 = 0$ se $x = -6$

$F_1(x) \cdot F_2(x) < 0 \iff x \in]-\infty, -6[\cup]-1, 2[$

12/10/18

i) $f(x) = -e^{x+2}$ eq.^{ne} del grafico $y = -e^{x+2}$
dom $f = \mathbb{R}$

$y = e^x$ grafico dell'esponenziale $y = e^{x+2}$ spostamento a sin di 2

$y = -e^{x+2}$ simmetrico rispetto all'asse x

$\cap$ asse x : nessuna $y = 0$ è un asintoto orizzontale

$\cap$ asse y : $(0, -e^2)$
$\simeq -7{,}4$

passa per $(-4, -\frac{1}{e^2})$ $(-3, -\frac{1}{e})$ $(-2, 1)$ $(-1, -e)$ $(0, -e^2)$

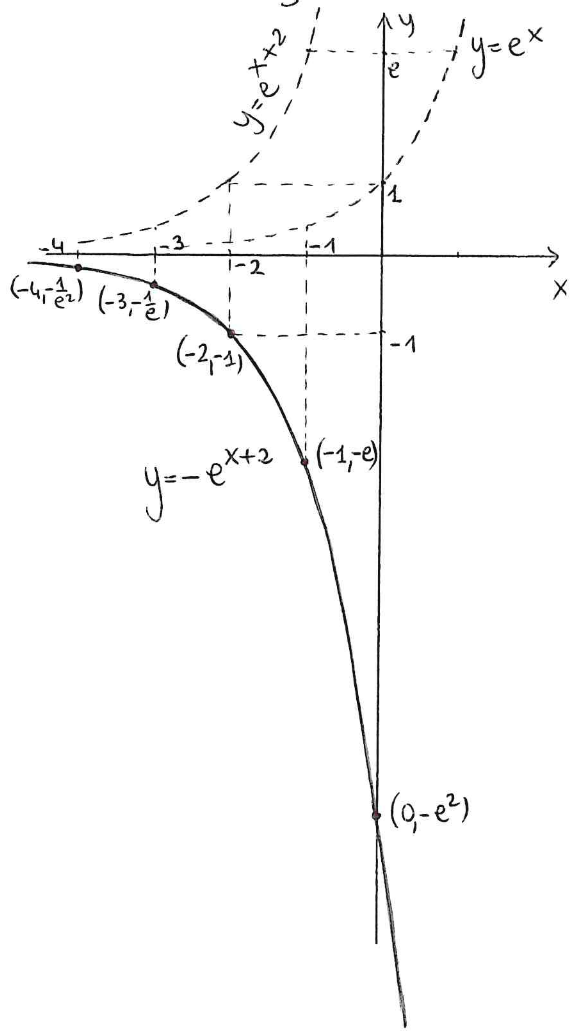
$g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 4x - 9$ eq.^{ne} del grafico $y = -\frac{1}{3}x^2 + 4x - 9$
dom $g = \mathbb{R}$

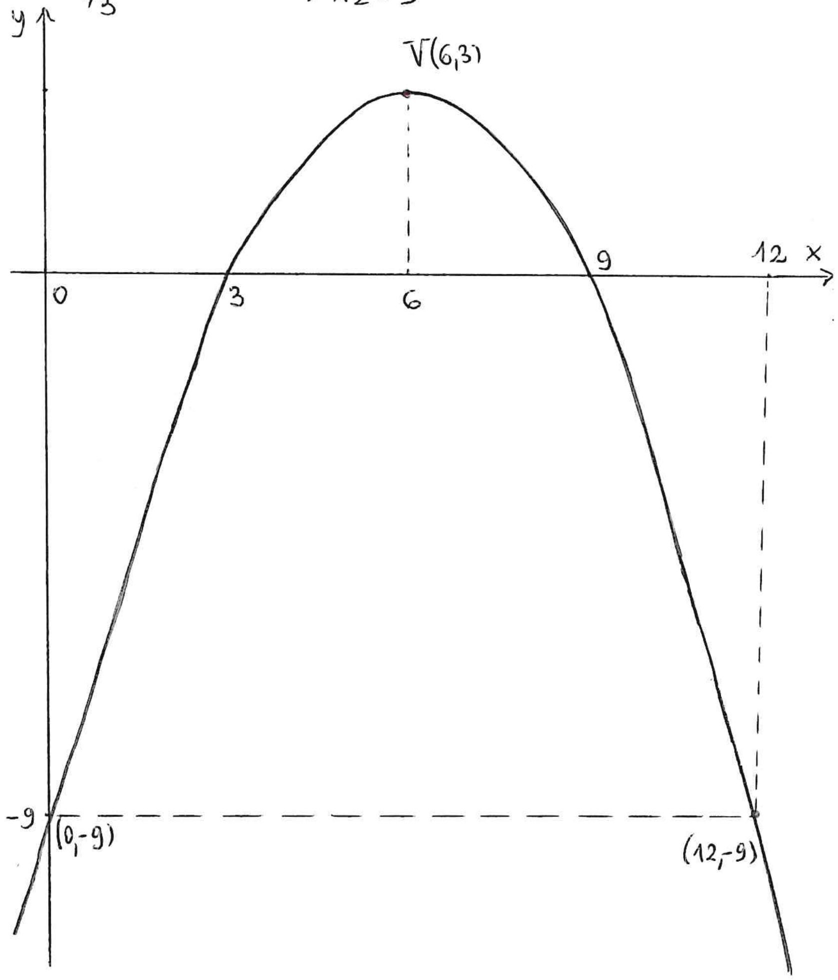
Si tratta di una parabola di $V(6,3)$, verso il basso,

$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-2/3} = 6$ $\quad y_V = -\frac{1}{3}36 + 24 - 9$
$= -12 + 24 - 9 = 3$

$\cap$ asse y $(0, -9) \rightarrow$ passa anche per $(12, -9)$

$\cap$ asse x : $\frac{1}{3}x^2 - 4x + 9 = 0$ $\quad x_{1,2} = \frac{2 \pm 1}{1/3} = 3(2 \pm 1)$ $\nearrow x_1 = 3$ $\searrow x_2 = 9$





ES.1) $\left|\frac{1}{2}x^2-5x+4\right| \le \frac{1}{4}x^2-1 \iff -\frac{1}{4}x^2+1 \le \frac{1}{2}x^2-5x+4 \le \frac{1}{4}x^2-1$ 12/10/18

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{2}x^2-5x+4 \ge -\frac{1}{4}x^2+1 \\ \frac{1}{2}x^2-5x+4 \le \frac{1}{4}x^2-1 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{3}{4}x^2-5x+3 \ge 0 \\ \frac{1}{4}x^2-5x+5 \le 0 \end{cases}$$

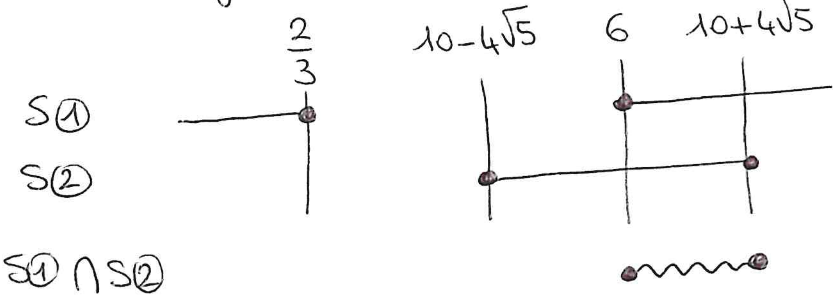
$x_{1,2}=\frac{5\pm 4}{3/2}$ $\nearrow x_1=\frac{2}{3}$, $\searrow x_2=6$

$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{20}}{1/2}=10\pm 2\sqrt{20}$
$=10\pm 4\sqrt{5}$

$$\iff \begin{cases} x\le \frac{2}{3} \text{ o } x\ge 6 \\ 10-4\sqrt{5}\le x\le 10+4\sqrt{5} \end{cases}$$

Dobbiamo mettere a SISTEMA le sol.ni.

Abbiamo già ordinato questi numeri nell'es.0) b) $\frac{2}{3}<10-4\sqrt{5}<6<10+4\sqrt{5}$:



Sol.ni
$x\in[6,\ 10+4\sqrt{5}]$

ES.2) a) Si tratta di una funzione definita a tratti :

1° tratto eq.ne $y=4-e^{x+2}$ è il grafico $y=-e^{x+2}$ disegnato nell'es.0)i) spostato in alto di 4

$\cap$ asse y : $(0,4-e^2)$ con $4-e^2\simeq -3,4$ $\quad\cap$ asse x : $(\log 4-2, 0)$ dove $x=\log 4-2=$
$=2\log 2-2\simeq 1,4-2$
$\simeq -0,6$

$f(x)=0$ (1° tratto) $\iff 4-e^{x+2}=0 \iff e^{x+2}=\underset{>0}{4}=e^{\log 4} \iff x+2=\log 4$
$\iff x=\log 4-2$

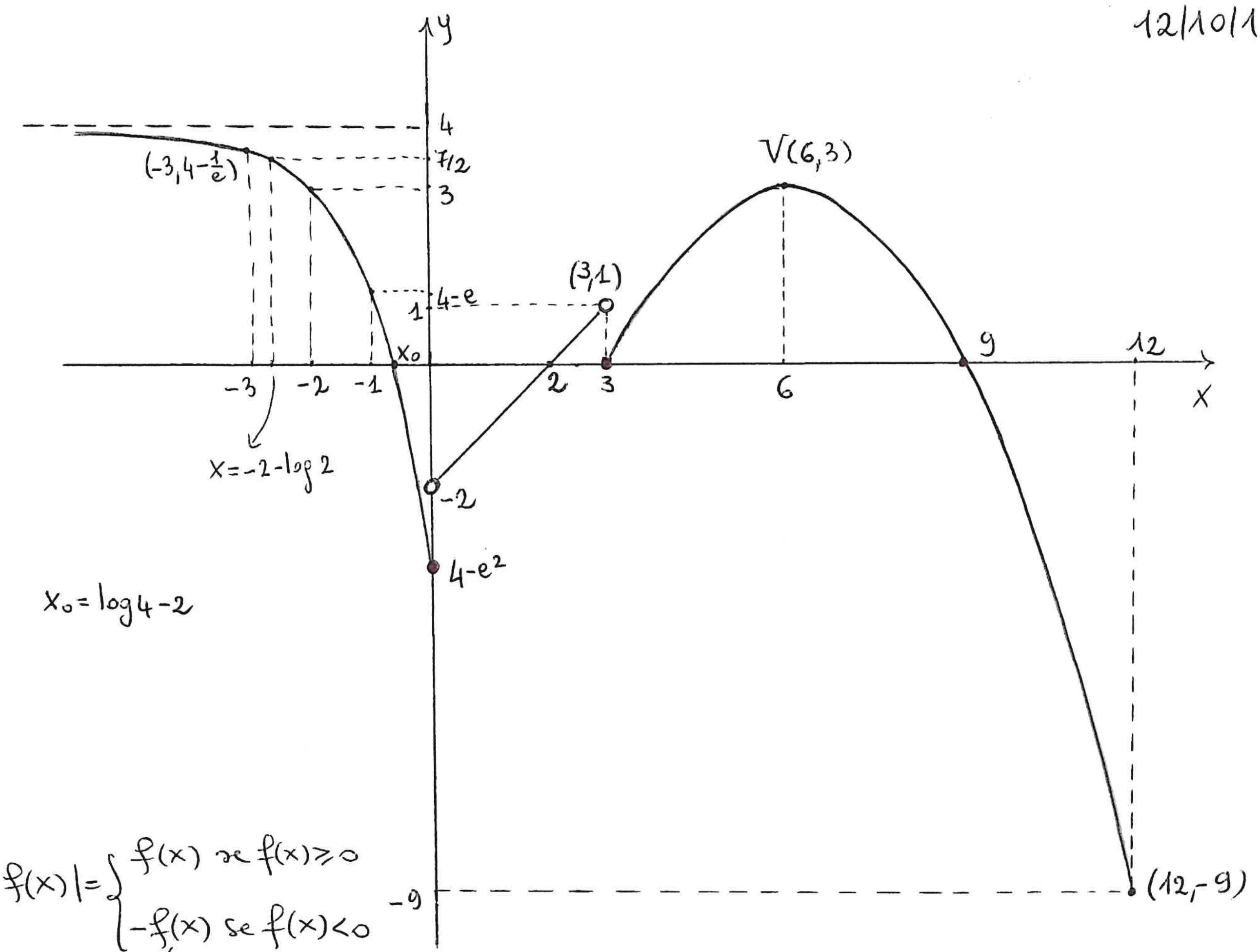
asintoto orizzontale $y=4$

PUNTI : $(-2-\log 2, \frac{7}{2})$ $(-3, 4-\frac{1}{e})$ $(-2,3)$ $(-1,4-e)$ $(0,4-e^2)$
$\simeq -2,7$ $\qquad \simeq 3,6$ $\qquad \simeq 1,3$

2° tratto eq.ne $y=x-2$ retta $(m=1, q=-2)$ per $(0,-2)$ e $(3,1)$
$\cap$ asse x : $(2,0)$

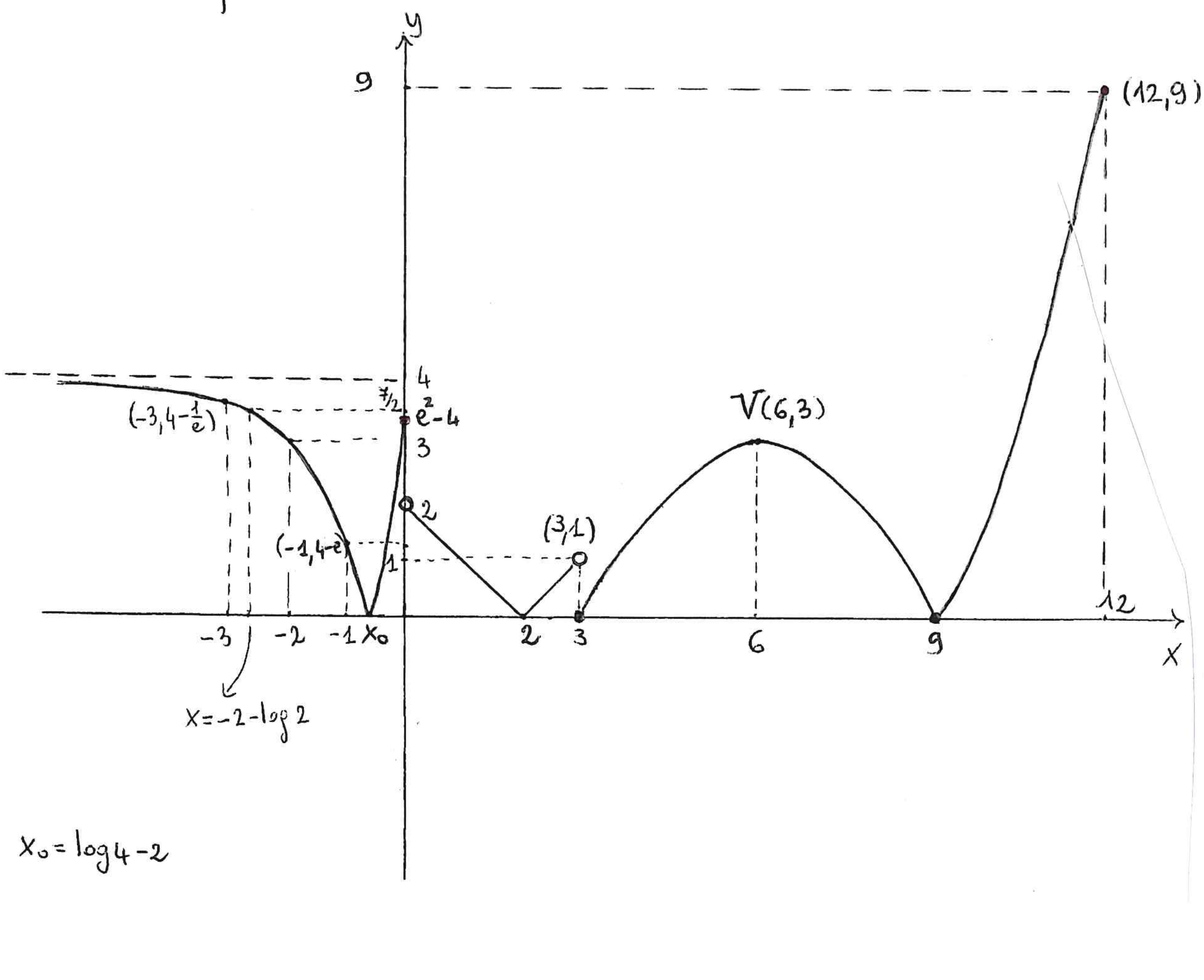
3° tratto eq.ne $y=-\frac{1}{3}x^2+4x-9$ parabola disegnata nell'es.0)i)

se $x=3, y=0$ $\quad$ se $x=12$ $y=-\frac{144}{3}+4\cdot 12-9=-48+48-9=-9$



b) $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$

simmetrico rispetto all' asse x



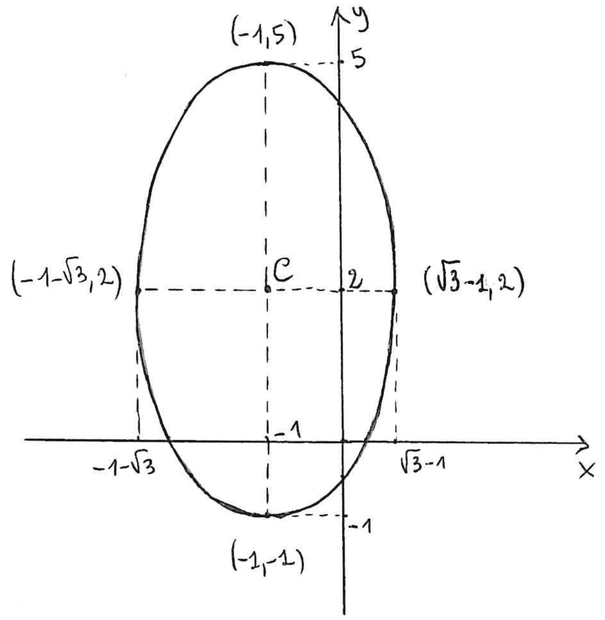
12/10/18

ES. 4) $3x^2+y^2+6x-4y-2=0$

$3(x^2+2x)+(y-2)^2-4-2=0$

$3(x+1)^2-3+(y-2)^2-4-2=0 \quad 3(x+1)^2+(y-2)^2=9$

$\frac{(x+1)^2}{3}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$ ELLISSE di $C(-1,2)$ $a=\underset{\simeq 1,7}{\sqrt{3}}$ $b=3$.



$\cap$ asse x: $\frac{(x+1)^2}{3}+\frac{4}{9}=1$ $\frac{(x+1)^2}{3}=\frac{5}{9}$

$(x+1)^2=\frac{5}{3}$ $x=-1\pm\underbrace{\sqrt{\frac{5}{3}}}_{\simeq 1,3}$ $x_1 \simeq +0,3$ $x_2 \simeq -2,3$

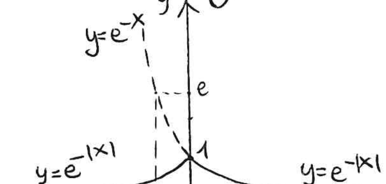
$\cap$ asse y: $\frac{1}{3}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$

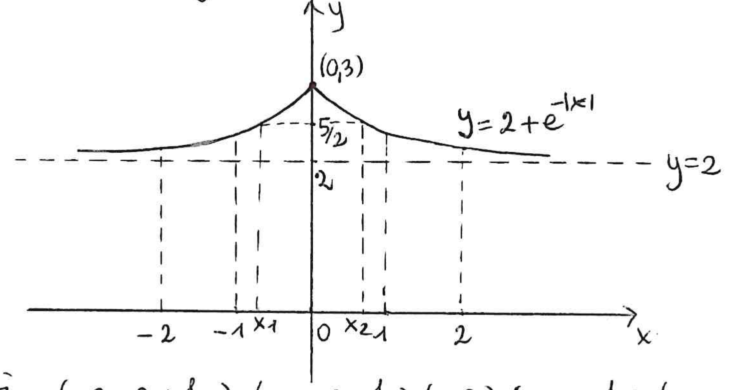
$\frac{(y-2)^2}{9}=\frac{2}{3}$ $(y-2)^2=6$ $y=2\pm\underset{\simeq 2,45}{\sqrt{6}}$

$y_1 \simeq 4,45$ $y_2 \simeq -0,45$

ES. 5) dom $f=\mathbb{R}$ costruzione 1° modo da $y=e^x$ costruiamo $\underset{x \mapsto -x}{y=e^{-x}}$ simmetrico rispetto all'asse y, poi $\underset{x \mapsto |x|}{y=e^{-|x|}}$ che si ottiene mantenendo uguale a se stessa la parte di grafico per $x \geq 0$ e poi ribaltandola rispetto all'asse y. Infine $y=2+e^{-|x|}$ viene spostato in alto di 2.

2° modo $y=2+e^{-|x|}=\begin{cases} 2+e^{-x} & x \geq 0 \quad y=e^x \to y=e^{-x} \to y=2+e^{-x} \\ 2+e^{x} & x<0 \quad y=e^x \to y=2+e^x \end{cases}$





asintoto orizzontale: $y=2$

$\cap$ asse x: ϕ $\cap$ asse y: $(0,3)$

eq.^{ne} del graf: $y=2+e^{-|x|}$

PUNTI: $(-2,2+\frac{1}{e^2})$ $(-1,2+\frac{1}{e})$ $(0,3)$ $(1,2+\frac{1}{e})$ $(2,2+\frac{1}{e^2})$

$f^{-1}(\frac{5}{2})$: sono i valori di x tali che $f(x)=\frac{5}{2} \iff e^{-|x|}+2=\frac{5}{2} \iff e^{-|x|}=\frac{1}{2}$

$\iff e^{-|x|}=e^{\log\frac{1}{2}} \iff -|x|=\log\frac{1}{2}=-\log 2 \iff |x|=\log 2$. Essendo $\boxed{\log 2>0}$ ci sono 2 sol.^{ni} $x=\pm\log 2$. $f^{-1}(\frac{5}{2})=\{\underset{x_1}{-\log 2},\underset{x_2}{\log 2}\}$.