COGNOME ______________ NOME ______________ MATRICOLA ⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋ CORSO SEGUITO Matematica	NON SCRIVETE QUI 1 2 3 4 5

UNIVERSITÀ DI PARMA — C.L. in Matematica

ESAME DI ELEMENTI di MATEMATICA

A.A. 2018-2019 — PARMA, 12 OTTOBRE 2018

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo **in stampatello** cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di quarantacinque minuti. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

Svolgete prima i calcoli in brutta, poi svolgete ordinatamente gli esercizi su questo foglio protocollo.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo. Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento.**

---

1) Negate la seguente proposizione

$$\exists\, \mathbf{y} > \mathbf{1} : \quad \forall\, \mathbf{x} > \mathbf{0} \qquad [\, \mathbf{P(x,y)} \Rightarrow \mathbf{Q(x,y)}\,]$$

Risposta: ... $\forall y > 1 \quad \exists x > 0 : \quad P(x,y) \ \underline{\text{E}}\ (\text{NON } Q(x,y))$

2) Dati due insiemi A e B, date la definizione di insieme differenza:

$A \setminus B = \ldots \left\{ x : \ x \in A \ \underline{\text{E}}\ x \notin B \right\}$

3) Relazione tra un numero e il suo reciproco:

$a < b < 0 \iff \ldots \quad \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a} < 0$

4) Su cosa si basa il principio della dimostrazione per assurdo?

Risposta: ...Sul fatto che siano equivalenti $[Q \Rightarrow B] \Leftrightarrow [\text{NON}B \Rightarrow \text{NON}Q]$, quindi invece di dimostrare che $Q \Rightarrow B$ posso dimostrare che dalla negazione di B segue la negazione di Q.

5) Scrivete un esempio di proposizione VERA nella forma $[\ \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{R} \quad \mathbf{P(x)} \Rightarrow \mathbf{Q(x)}\ ]$.

Poi spiegate quale tra le due proposizioni $\mathbf{P(x)}$ e $\mathbf{Q(x)}$ è **condizione necessaria** per l'altra e perchè.

Risposta: ... es. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \underbrace{x > 1}_{P(x)} \Rightarrow \underbrace{x^2 > 1}_{Q(x)}$ è VERA.

La condizione $Q(x)$ è CONDIZIONE NECESSARIA per $P(x)$ perchè se $Q(x)$ è FALSA, allora $P(x)$ è sicuramente FALSA, quindi è NECESSARIO che $Q(x)$ sia VERA affinchè $P(x)$ possa essere VERA. Tuttavia se $Q(x)$ è VERA, $P(x)$ può essere sia VERA sia FALSA.

6) Dimostrate la formula relativa al complementare dell'intersezione di due insiemi:

$(A \cap B)^C = \ldots A^c \cup B^c$

Dimostrazione: ... L'uguaglianza tra due insiemi è definita da $A = B \Leftrightarrow \forall x \quad x \in A \Leftrightarrow x \in B$. Quindi dimostriamo che $\forall x \quad x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$.

Sia $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A$ $\underline{o}$ $x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in A^c$ $\underline{o}$ $x \in B^c \Leftrightarrow x \in (A^c \cup B^c)$.

Come volevasi dimostrare (c.v.d.)

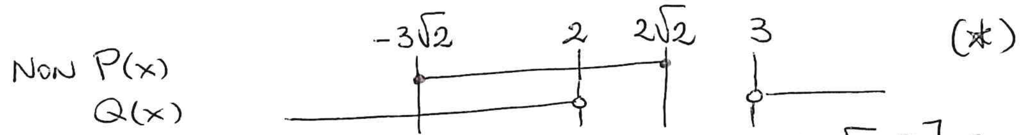
7) Considerate i due predicati:

$$\mathbf{P(x)} : x < -3\sqrt{2} \ \mathbf{o} \ x > 2\sqrt{2} \qquad \mathbf{Q(x)} : x < 2 \ \mathbf{o} \ x > 3 .$$

a) Dite (motivando la risposta) se è VERA o FALSA la seguente proposizione

$$[\ \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{R} \quad (\mathbf{non\ P(x)})\ \mathbf{o}\ \mathbf{Q(x)}\ ]$$

Risposta: ... NON $P(x)$ " $-3\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$ $\qquad 2\sqrt{2} \simeq 2{,}8$



La Proposizione data è $\boxed{\text{FALSA}}$ perchè se $x \in]2\sqrt{2}, 3]$ sono false entrambe e quindi (NON P) o Q è falsa - Ad es. è falsa per $x = 3$ oppure per $x = \frac{29}{10}$ - (OSS. Poichè $[\forall x \in \mathbb{R}\ (\text{non} P) \text{ o } Q] \Leftrightarrow [\forall x \in \mathbb{R}\ P \Rightarrow Q]$ si poteva anche ragionare usando $\Rightarrow$)

b) Scrivete prima la negazione teorica della proposizione assegnata, poi la negazione esplicita.

Negazione teorica: ... $\exists x \in \mathbb{R} \ : \ P(x) \ \underline{E} \ (\text{NON } Q(x))$ $\qquad$ (VERA per $x \in]2\sqrt{2}, 3]$)

Negazione esplicita: ... $\exists x \in \mathbb{R} \ : (x < -3\sqrt{2} \ \underline{o} \ x > 2\sqrt{2}) \ \underline{E} \ (2 \leq x \leq 3)$

c) Detti A e B i due insiemi costituiti dai valori di x che verificano i due predicati $\mathbf{P(x)}$ e $\mathbf{Q(x)}$ rispettivamente, traducete la proposizione di cui al punto a) in termini dei due insiemi A e B: (OSS Se si è considerato $\forall x \in \mathbb{R}\ P(x) \Rightarrow Q(x)$, allora la proposizione si traduce in $A \subseteq B$ che è FALSA (vedi (*)) -

Risposta: ... La proposizione significa che $A^C \cup B = \mathbb{R}$

$A^C = [-3\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ $\quad B =]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$ e come si vede da (*) la loro unione NON è tutto $\mathbb{R}$.

8) **(FACOLTATIVO)** Dimostrate che la composizione di due funzioni **iniettive** $f : A \to B$, $g : B \to C$ è una funzione iniettiva.

Dimostrazione: ... IP① f è iniettiva, cioè $\forall a_1, a_2 \in A \quad f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

IP② g è iniettiva cioè $\forall b_1, b_2 \in B \ g(b_1) = g(b_2) \Rightarrow b_1 = b_2$

Tesi $g \circ f$ è iniettiva cioè $\forall a_1, a_2 \in A \quad (g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$.

Siano dunque $a_1, a_2 \in A$: $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \underset{\text{per def. di funzione composta}}{\Leftrightarrow} g(f(a_1)) = g(f(a_2))$

$\Leftrightarrow \quad g(b_1) = g(b_2) \underset{\text{g è IP② iniettiva}}{\Rightarrow} b_1 = b_2 \Leftrightarrow$

$b_1 = f(a_1) \in B$

$b_2 = f(a_2) \in B$

$\Leftrightarrow \quad f(a_1) = f(a_2) \underset{\text{f iniettiva IP①}}{\Rightarrow} a_1 = a_2$. $\qquad$ Come volevasi dimostrare. (c.v.d.)