COGNOME ______________	NON SCRIVETE QUI
NOME ______________	
MATRICOLA ⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌋	1 2 3 4 5
CORSO SEGUITO Matematica	

UNIVERSITÀ DI PARMA — C.L. in Matematica

ESAME DI ELEMENTI di MATEMATICA

A.A. 2018-2019 — PARMA, 15 NOVEMBRE 2018

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo **in stampatello** cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di un'ora. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

Svolgete prima i calcoli in brutta, poi svolgete ordinatamente gli esercizi su questo foglio.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo. Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento** .

---

1) Negate la seguente proposizione

$$\forall\, \mathbf{x} > -\mathbf{2} \quad \exists\, \mathbf{y} < \mathbf{0} \ : \quad [\ \mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \text{ e } \mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y})\ ]$$

Risposta: ... $\exists\, x > -2 \ : \ \forall y < 0 \quad [\,(\text{NON } P(x,y)) \ \underline{o} \ (\text{NON } Q(x,y))\,]$

2) Date la definizione di **sottoinsieme**:

$A \subseteq B \iff$ ..$\forall x \quad x \in A \Rightarrow x \in B$

3) Relazione tra un numero e il suo quadrato:

$a < b < 0 \iff$ ...$0 < b^2 < a^2$

4) Scrivete un esempio di proposizione VERA nella forma $[\ \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{R} \quad \mathbf{P(x)} \iff \mathbf{Q(x)}\ ]$.

Risposta: ...

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x^2 < 1 \iff -1 < x < 1$

5) Negate la proposizione $[\ \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{R} \quad \mathbf{P(x)} \iff \mathbf{Q(x)}\ ]$.

Risposta: ... NON $[\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) \iff Q(x)] \iff$

$\iff$ NON $[\ \forall x \in \mathbb{R} \quad (P(x) \Rightarrow Q(x))$ $\underline{e}$ $(Q(x) \Rightarrow P(x))]$

$\iff \exists x \in \mathbb{R}$: [NON $(P(x) \Rightarrow Q(x))$] $\underline{o}$ [NON $(Q(x) \Rightarrow P(x))$]

$\iff \exists x \in \mathbb{R}$: $[P(x)$ $\underline{e}$ (NON $Q(x))]$ $\underline{o}$ $[Q(x)$ $\underline{e}$ (NON $P(x))]$

cioè esiste x per cui P(x) è vera ma Q(x) falsa (così $P \Rightarrow Q$ Falsa) oppure tale che Q(x) è vera ma P(x) falsa (così $Q \Rightarrow P$ Falsa).

6) Dimostrate (con tutti i passaggi e le proprietà utilizzate) che:

$$(A \setminus B)^C = B \cup A^C$$

Dimostrazione: ... Per definizione due insiemi sono UGUALI $\iff$ contengono gli stessi elementi ($E = F \iff \forall x \quad x \in E \iff x \in F$).

Dimostriamo che $\forall x \quad x \in (A \setminus B)^c \iff x \in B \cup A^c$

$\boxed{x \in (A \setminus B)^c} \underset{\text{def. di complementare}}{\iff} x \notin A \setminus B \underset{\text{Def. di } \notin}{\iff}$ NON $(x \in A \setminus B) \underset{\text{Def di } A \setminus B}{\iff}$

NON $(x \in A$ $\underline{e}$ $x \notin B) \iff x \notin A$ $\underline{o}$ $x \in B \iff x \in B$ $\underline{o}$ $x \notin A$

NON (P $\underline{e}$ Q) $\iff$ NON P $\underline{o}$ NON Q

Proprietà Commutativa di $\underline{o}$

$\iff x \in B$ $\underline{o}$ $x \in A^c \iff \boxed{x \in B \cup A^c}$

Definizione di $\cup$

c.v.d.

7) Considerate i due predicati:

$$\mathbf{P(x)} : x > -\sqrt{7} \ \text{ e } \ x < -1 \qquad \mathbf{Q(x)} : x^2 < 9 \ \text{ e } \ x < 0 \,.$$

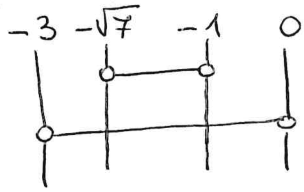
a) Dite (motivando la risposta) se è VERA o FALSA la seguente proposizione

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R} \qquad [\ \mathbf{P(x)} \Rightarrow \mathbf{Q(x)}\ ]\,.$$

Risposta: ... $P(x) : \ -\sqrt{7} < x < -1$ $\qquad Q(x) : \ -3 < x < 3$ e $x < 0$

$Q(x) : \ -3 < x < 0$

La proposizione è $\boxed{\text{VERA}}$ in quanto tutti i numeri $x \in]-\sqrt{7},-1[$ appartengono anche a $]-3,0[$ (essendo $-\sqrt{7} > -3$ $\ \sqrt{7} < 3$ $\ 7 < 9$ VERO)



$A = \{x : P(x)\}$

$B = \{x : Q(x)\}$

quindi se è vera $P(x)$ è vera anche $Q(x)$.

b) Scrivete prima la negazione teorica della proposizione assegnata, poi la negazione esplicita.

Negazione teorica: ... $\exists x \in \mathbb{R} : \quad P(x)$ e (NON $Q(x)$)

Negazione esplicita: ... $\exists x \in \mathbb{R} : \ -\sqrt{7} < x < -1$ e $(x \le -3$ o $x \ge 0)$ (che è Falsa in quanto i due insiemi $]-\sqrt{7},-1[$ e $]-\infty,-3] \cup [0,+\infty[$ non hanno punti in comune ($\cap = \emptyset$))

8) **(FACOLTATIVO)** Date due funzioni $f : A \to B$, $g : B \to C$ dimostrate che se f NON è una funzione iniettiva, allora la composizione delle due funzioni NON è una funzione iniettiva.

Dimostrazione: ... IPOTESI $f : A \to B$ non è INIETTIVA

Def. di funzione INIETTIVA : $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 \ne x_2 \Rightarrow f(x_1) \ne f(x_2)$

Negazione di funzione iniettiva : $\boxed{\exists x_1, x_2 \in A : \ x_1 \ne x_2 \text{ e } f(x_1) = f(x_2)\,.}$ IPOT

TESI $g \circ f : A \to C$ NON è iniettiva

cioè $\boxed{\exists x_1, x_2 \in A : \ x_1 \ne x_2 \text{ e } (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)\,.}$ Tesi

Dimostriamo la tesi. Per ipotesi $\exists x_1, x_2 \in A$:

$x_1 \ne x_2$ e $f(x_1) = f(x_2)$, ma allora essendo $f(x_1) = f(x_2) \in B$ e

$g : B \to C$ una funzione avremo che

$\exists x_1, x_2 \in A : \ x_1 \ne x_2$ e $g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in A : x_1 \ne x_2$ e $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$

c.v.d.