COGNOME ______________________

NOME ______________________

MATRICOLA |_|_|_|_|_|_|

CORSO SEGUITO Mat Fis

NON SCRIVETE QUI

1	2	3	4	5

UNIVERSITÀ DI PARMA — C.L. in Matematica e Fisica

ESAME DI ELEMENTI DI MATEMATICA

A.A. 2018-2019 — PARMA, 16 NOVEMBRE 2018

ElMat - 16/11/18 - 1 -

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo **in stampatello** cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

Svolgete prima i calcoli in brutta, poi svolgete ordinatamente gli esercizi su un altro foglio protocollo a quadretti, infine **copiate le sole risposte** su questo foglio.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo. Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare la risposta.**

0) **PARTE PRELIMINARE** Completate:

a) Determinate l'insieme A delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -x - 7 \leq x - 4 \\ \dfrac{x^4 - x^3 - 6x^2}{x^2 + 3x - 4} > 0 \end{cases}$$

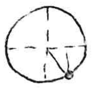
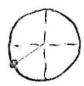
Risposta: $A = \left[-\frac{3}{2}, 0\right[\cup \left]0, 1\right[\cup \left]3, +\infty\right[$

b) Dati i due insiemi $A = [-2, -\frac{8}{7}[\cup]\frac{5}{4}, 20]$, $B =]-\frac{2}{\sqrt{3}}, 3\sqrt{2} - 3] \cup [4, +\infty[$, allora:

$A \cap B = \left]-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{8}{7}\right[\cup [4, 20]$ $\qquad B \setminus A = \left[-\frac{8}{7}, 3\sqrt{2}-3\right] \cup \left]20, +\infty\right[$

(sono richiesti i calcoli di tutti i confronti necessari, senza utilizzare i numeri decimali).

c) $\left|\frac{4}{7}x^2 - \frac{5}{7}\right| \geq \frac{4}{7} \iff$ $x \in \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$

d) $\cos(\frac{5}{3}\pi) = \frac{1}{2}$  $\text{sen}(-\frac{3}{4}\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  $\tan(\frac{7}{6}\pi) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 

(è richiesto il disegno di ogni angolo).

e) $\log_2 e^{\frac{1}{2}\log 2} = ..$ $\frac{1}{2}$

f) La circonferenza di centro $(-3,1)$ e raggio $\sqrt{10}$ ha equazione ... $(x+3)^2+(y-1)^2=10$

Il punto $(0,0)$ appartiene VERO FALSO alla circonferenza perchè ... $(0+3)^2+(0-1)^2=10$ quindi $(0,0)$ verifica l'eq.ne

L'equazione della retta tangente alla circonferenza nel punto $(\sqrt{10}-3, 1)$ è ... $x=\sqrt{10}-3$

I punti della circonferenza aventi ordinata 2 sono ... $(0,2)$, $(-6,2)$

g) Determinate e disegnate tutte le soluzioni $x \in [0, 2\pi]$ dell'equazione

$(\cos x - \sqrt{3})(-2\operatorname{sen} x - 1) = 0 \iff ....$ $x=\frac{7}{6}\pi$ o $x=\frac{11}{6}\pi$

h) $\dfrac{e^{\frac{4}{3}x^2}}{e^{4x}} > \dfrac{1}{e^3} \iff ...$ $\forall x \neq \frac{3}{2}$ $\qquad \log(2x-1) < 1 \iff ..$ $x \in \left]\frac{1}{2}, \frac{1+e}{2}\right[$

i) Disegnate sul foglio a quadretti con precisione (dominio, equazione del grafico, tutti i passaggi necessari per la costruzione, intersezioni con gli assi coordinati, punti significativi, asintoti) il grafico delle seguenti funzioni:

$f(x) = 1 + \log x, \qquad g(x) = -3 + \sqrt{x-3}.$

---

1) Risolvete la disequazione $\sqrt{4x^2-3} > 2x+4.$ S $x \in \left]-\infty, -\frac{19}{16}\right[$

---

2) a) Disegnate con precisione sul foglio a quadretti il grafico della seguente funzione (in parte disegnata nella parte preliminare punto i)), specificando l'equazione del grafico di ogni tratto, tutti i passaggi necessari per la costruzione di ogni tratto, le coordinate dei punti di intersezione con gli assi cartesiani, gli asintoti e eventuali altri punti significativi:

$$f(x) = \begin{cases} 1+\log(-x) & \text{se } x<0 \\ -\frac{4}{3}x+2 & \text{se } 0<x<3 \\ -3+\sqrt{x-3} & \text{se } 3 \le x \le 12 \end{cases}$$

dom $f = ...$ $]-\infty,0[\cup]0,12]$ $\qquad$ Imm $f = ...$ $\mathbb{R}$

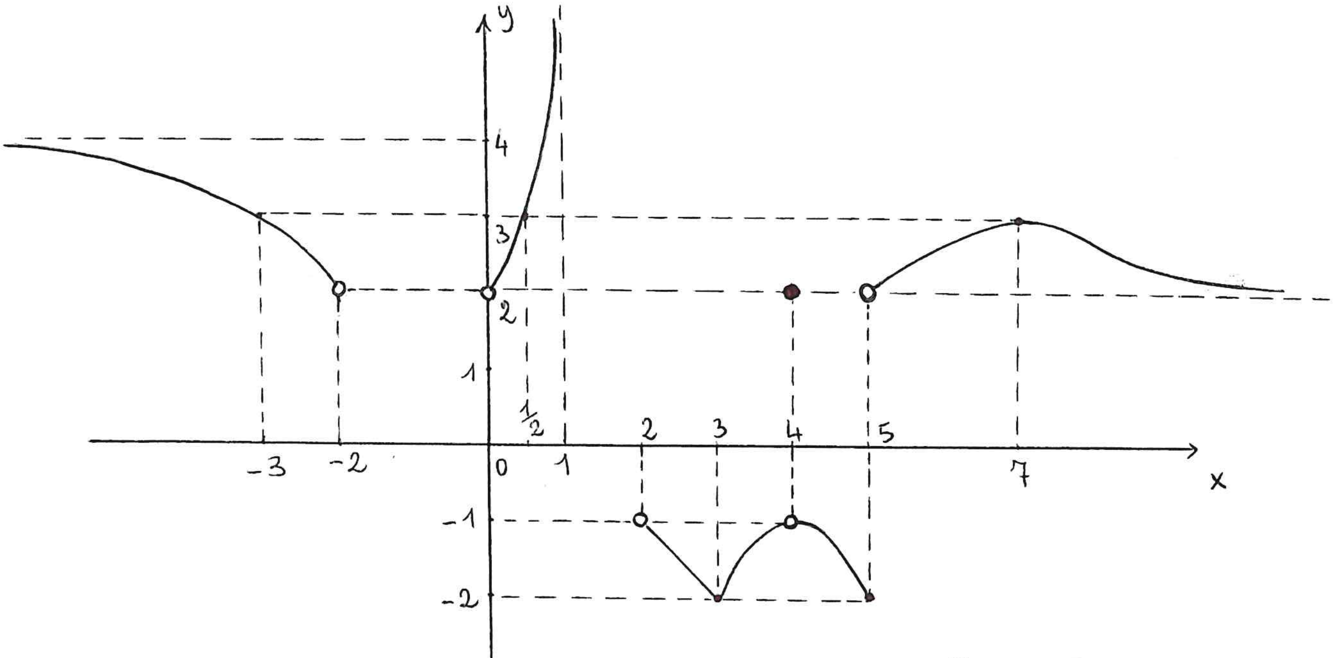
$f(-e^2) = ...$ $1+\log e^2 = 1+2 = 3$ $\qquad f^{-1}(0) = ..$ $\left\{-\frac{1}{e}, \frac{3}{2}, 12\right\}$

$-e^2<0 \to 1°$ tratto

b) Disegnate con precisione il grafico della funzione $g(x) = |f(x)|$.

---

3) Considerate la funzione f che ha il seguente grafico:



dom $f =]-\infty,-2[\,\cup\,]0,1[\,\cup\,]2,+\infty[$ Imm $f = [-2,-1[\,\cup\,[2,+\infty[$

$f(0) = \not\exists$ $f(4) = 2$ $f^{-1}(3) = \{-3, \frac{1}{2}, 7\}$

Determinate il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$ per $k \in [2,4]$: $k=2$ 1 sol.ne; $k \in]2,3[$ 4 sol.ni; $k=3$ 3 sol.ni; $k \in]3,4[$ 2 sol.ni; $k=4$ 1 sol.ne

La funzione f è iniettiva su $[4,+\infty[$: VERO o $\boxed{\text{FALSO}}$ perché $\forall y \in]2,3[$ $\exists x_1 \in]5,7[, x_2 \in]7,+\infty[$ con $x_1 \neq x_2$, ma $f(x_1) = f(x_2)$.
(motivate la risposta sul foglio a quadretti).

(FISICA) Determinate $f(\,]2,3[\cup[4,+\infty[\,) = [-2,-1[\,\cup\,[2,3]$

(MATEMATICA) Le soluzioni della disequazione $2 < f(x) \leq 3$ sono ... $x \in [-3,-2[\,\cup\,]0,\frac{1}{2}]\,\cup\,]5,+\infty[$

(MATEMATICA) Scrivete sul foglio a quadretti la definizione di funzione strettamente decrescente per una funzione $f : \mathrm{dom}\, f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom} f \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

---

4) Determinate l'equazione della parabola che interseca l'asse delle x nei punti $(1\,,0)$ e $(3\,,0)$, e interseca l'asse delle y nel punto $(0\,,6)$. Eq.ne $y = 2x^2 - 8x + 6$

Disegnate con precisione la parabola trovata sul foglio a quadretti.

---

5) **(FISICA - FACOLTATIVO)** L'insieme di equazione $2y^2 - x^2 + 2 = 0$ rappresenta un'iperbole ...... avente le seguenti caratteristiche: ...... ASINTOTI $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$

EQ.ne $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ $\quad \cap$ asse x : $(\pm\sqrt{2}, 0)$

Disegnate con precisione l'insieme trovato sul foglio a quadretti, specificando le intersezioni con gli assi e con le rette di equazione $x = -2$ e $y = 1$.

SOLUZIONE (16/11/2018)

es 0) a) 1^a dis.ne $-x-7 \le x-4 \iff 2x \ge -3 \iff x \ge -\frac{3}{2}$ $A_1 = [-\frac{3}{2}, +\infty[$ Sol.ni 1^a Dis.ne

2^a dis.ne FRATTA $N(x) = x^2(x^2-x-6) = N_1(x) \cdot N_2(x)$

$D(x) = x^2+3x-4$

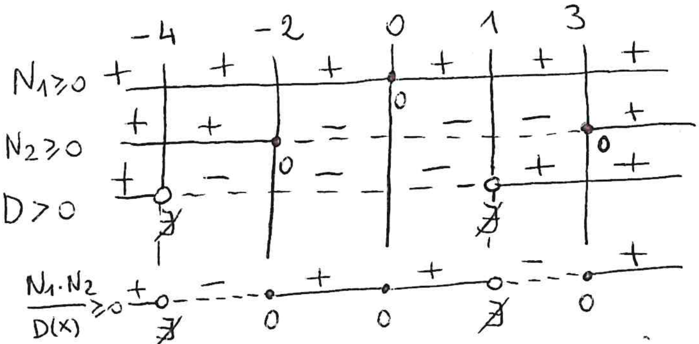
$N_1(x) \ge 0$ $x^2 \ge 0 \ \forall x$

$x^2 = 0 \iff x = 0$

$N_2(x) \ge 0$ $(x+2)(x-3) \ge 0$ $x \le -2$ o $x \ge 3$

$= 0$ $x = -2$ o $x = 3$

$D(x) > 0$ $(x-1)(x+4) > 0$ $x < -4$ o $x > 1$



$]-\infty,-4[\cup]-2,0[\cup]0,1[\cup]3,+\infty[= A_2$ sol.ni 2^a DIS.ne

2^a dis.ne verificata se $x \in]-\infty,-4[\cup]-2,0[\cup]0,1[\cup]3,+\infty[$

Le sol.ni del SISTEMA sono date da $A = A_1 \cap A_2$

Essendo $-2 < -\frac{3}{2} < 0$ si ottiene

$$A = [-\tfrac{3}{2}, 0[\cup]0,1[\cup]3,+\infty[.$$

b) $3\sqrt{2}-3 > 0$ poiché $3\sqrt{2} > 3 \iff \sqrt{2} > 1$ VERO

$3\sqrt{2}-3 < 2$ poiché $3\sqrt{2} < 5 \iff 18 < 25$ VERO

quindi tra i numeri positivi dobbiamo confrontare $\frac{5}{4}$ e $3\sqrt{2}-3$:

$\frac{5}{4} \overset{?}{<} 3\sqrt{2}-3 \iff \frac{17}{4} < 3\sqrt{2} \iff 17 < 12\sqrt{2} \iff 289 < 144 \cdot 2 = 288$ Falso

quindi: $3\sqrt{2}-3 < \frac{5}{4} < 4 < 20$

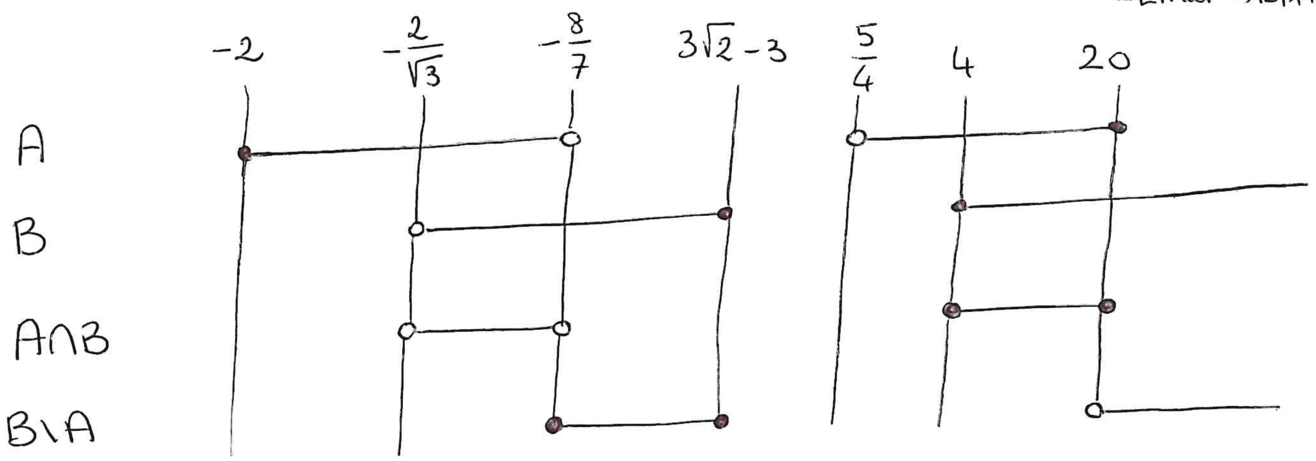
Nei numeri negativi è chiaro che $-2 = -\frac{14}{7} < -\frac{8}{7}$ e che $-2 < -\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\left(2 > \frac{2}{\sqrt{3}} \iff \sqrt{3} > 1 \text{ vero} \right)$ quindi dobbiamo confrontare $-\frac{8}{7}$ e $-\frac{2}{\sqrt{3}}$

$-\frac{8}{7} \underset{?}{<} -\frac{2}{\sqrt{3}} \iff \frac{8}{7} > \frac{2}{\sqrt{3}} \iff 4\sqrt{3} > 7 \iff 16 \cdot 3 = 48 > 49$ Falso.

Quindi

$$-2 < -\frac{2}{\sqrt{3}} < -\frac{8}{7} < 3\sqrt{2}-3 < \frac{5}{4} < 4 < 20 .$$



$A\cap B = \left]-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{8}{7}\right[\cup [4,20]$ $\quad B\setminus A = \left[-\frac{8}{7}, 3\sqrt{2}-3\right] \cup \left]20, +\infty\right[$

c) $\left|\frac{4}{7}x^2 - \frac{5}{7}\right| \geq \frac{4}{7} \iff \frac{4}{7}x^2 - \frac{5}{7} \geq \frac{4}{7}$ o $\frac{4}{7}x^2 - \frac{5}{7} \leq -\frac{4}{7}$

$\iff 4x^2 \geq 9$ o $4x^2 \leq 1 \iff x^2 \geq \frac{9}{4}$ o $x^2 \leq \frac{1}{4}$

$\iff \left(x \leq -\frac{3}{2} \text{ o } x \geq \frac{3}{2}\right)$ o $\left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\right)$

Unendo le soluzioni delle due disequazioni otteniamo

$\iff x \in \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$

e) $\log_2 e^{\frac{1}{2}\log 2} = \log_2\left(e^{\log\sqrt{2}}\right) = \log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

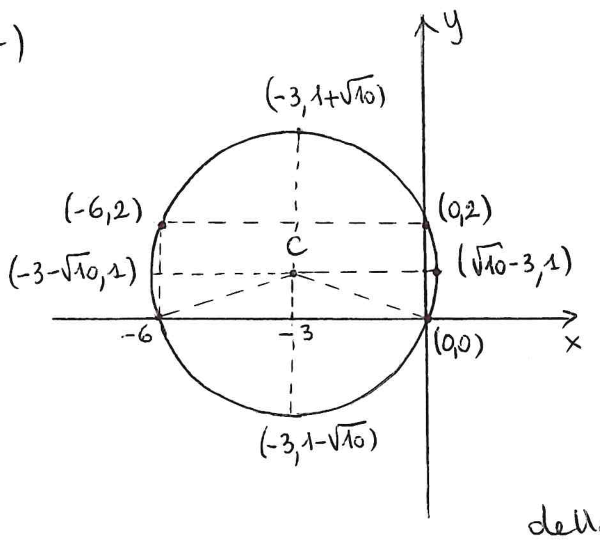
$\alpha \log x = \log x^\alpha \quad \forall x>0$

$2^{1/2} = \sqrt{2}$

$e^{\log x} = x \quad \forall x>0$

Def. di logaritmo in base 2

f)



eq.^{ne} $(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = R^2$

$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 10$

$(0,0) \in$ circonf perchè

$(0+3)^2 + (0-1)^2 = 9+1 = 10$ (cioè l'eq.^{ne} è verificata per $(0,0)$)

oppure perchè $\text{dist}((0,0), (-3,1)) = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} = R$

$(\sqrt{10}-3, 1)$ è il punto più a destra della circonferenza e la tangente in questo punto è verticale : eq.^{ne} $x = \sqrt{10} - 3$.

I punti della circonferenza aventi ordinata $y=2$ sono:

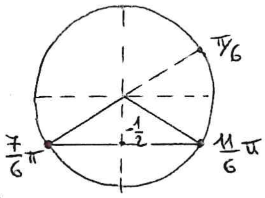
$(x+3)^2+(2-1)^2=10 \qquad (x+3)^2=9 \qquad x^2+6x=0 \qquad x(x+6)=0 \qquad x=0$
$x=-6$

$(0,2)$ e $(-6,2)$.

g) $(\cos x-\sqrt{3})(-2\operatorname{sen}x-1)=0 \Leftrightarrow \cos x-\sqrt{3}=0$ o $-2\operatorname{sen}x-1=0$

legge di annullamento del prodotto

$\Leftrightarrow \cos x=\sqrt{3}$ o $\operatorname{sen}x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}x=-\frac{1}{2}$



$\Downarrow$
essendo $-1\le\cos x\le 1 \ \forall x$ e $\sqrt{3}>1$ è IMPOSSIBILE

$\Leftrightarrow x=\frac{7}{6}\pi$ o $x=\frac{11}{6}\pi$

h) ⊙ $\dfrac{e^{\frac{4}{3}x^2}}{e^{4x}} > \dfrac{1}{e^3}$ C.E. $\mathbb{R}$ poichè $e^{4x}\neq 0 \ \forall x \quad e^3\neq 0 \ \forall x$

$e^{\frac{4}{3}x^2-4x} > e^{-3}$ per le proprietà delle potenze

$\frac{4}{3}x^2-4x>-3$ perchè e^x è crescente $(e^{x_1}>e^{x_2} \Leftrightarrow x_1>x_2)$

$\Updownarrow$

$\frac{4}{3}x^2-4x+3>0 \Leftrightarrow 4x^2-12x+9>0 \Leftrightarrow (2x-3)^2>0$

$\Delta=0$
$x=3/2$

SOL.ni $\forall x\neq\frac{3}{2}$

⊙ $\log(2x-1)<1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1>0 & \text{C.E.} \\ \log(2x-1)<\log e \end{cases} \underset{\log x \nearrow}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x>\frac{1}{2} \\ 2x-1<e \end{cases}$

cioè $x_1<x_2 \Leftrightarrow \log x_1<\log x_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{2} \\ 2x<1+e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{2} \\ x<\frac{1+e}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left]\frac{1}{2},\frac{1+e}{2}\right[$.

i) ⊙ $f(x) = 1 + \log x$ $\operatorname{dom} f =]0, +\infty[$ eq.^{ne} del grafico $y = 1 + \log x$

si tratta del grafico del logaritmo ($y = \log x$), spostato in alto di 1 -

asintoti : $x = 0$ asintoto verticale

$\cap$ asse x : $\log x = -1$ $x = \frac{1}{e}$ $\cap$ asse y: ϕ

PUNTI : $(\frac{1}{e}, 0)$, $(1, 1)$, $(e, 2)$, $(e^2, 3)$

⊙ $g(x) = -3 + \sqrt{x-3}$ $\operatorname{dom} f = [3, +\infty[$ eq.^{ne} del grafico $y = -3 + \sqrt{x-3}$

si tratta del grafico della radice ($y = \sqrt{x}$) spostato a destra di 3 ($y = \sqrt{x-3}$)

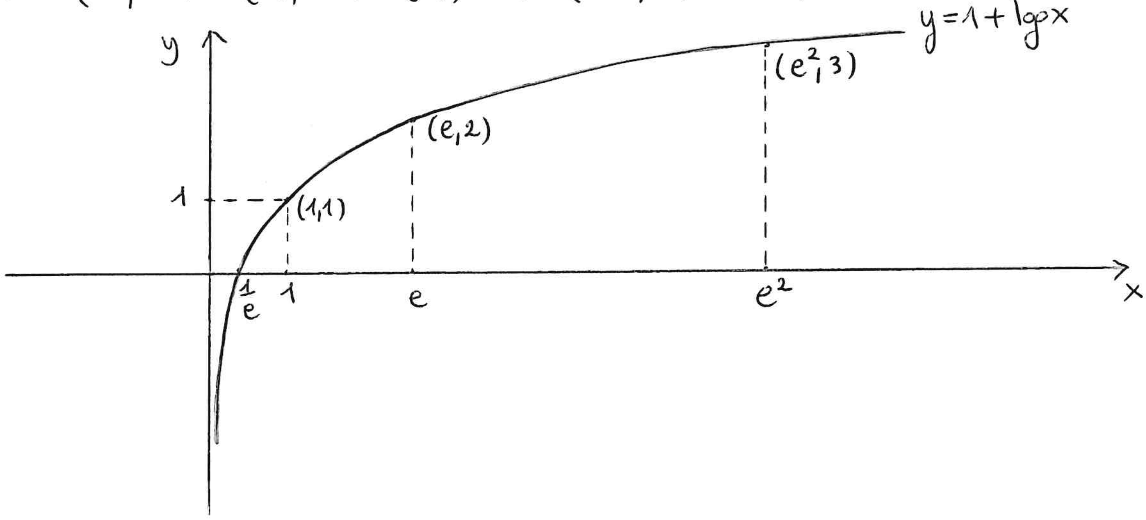
e in basso di 3 ($y = -3 + \sqrt{x-3}$).

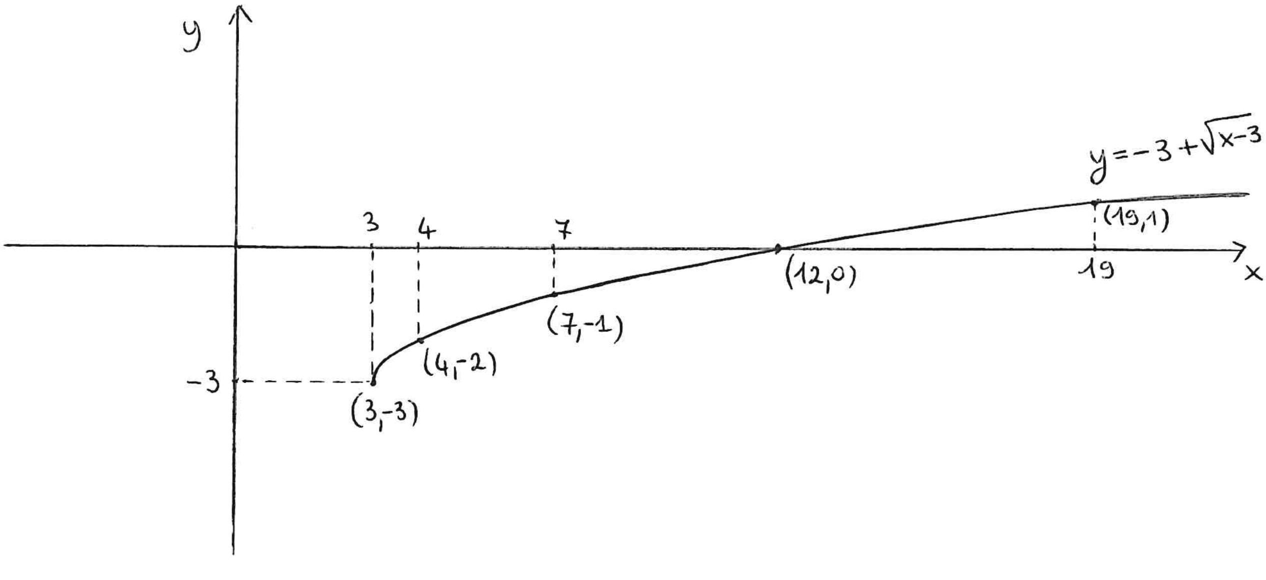
asintoti : nessuno

$\cap$ asse x : $\sqrt{x-3} = 3 > 0$ $x - 3 = 9$ $x = 12$

$\cap$ asse y : ϕ

PUNTI : $(3, -3)$ $(4, -2)$ $(7, -1)$ $(12, 0)$ $(19, 1)$





ES. 1) $\sqrt{4x^2-3} > 2x+4 \iff \begin{cases} 4x^2-3 \geq 0 \\ 2x+4<0 \end{cases}$ o $\begin{cases} 4x^2-3\geq 0 \\ 2x+4 \geq 0 \\ 4x^2-3 > (2x+4)^2 \end{cases}$

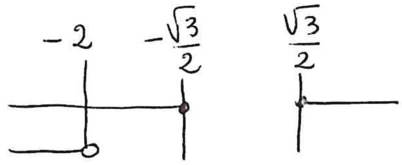
$\iff \begin{cases} x \leq -\frac{\sqrt3}{2} \text{ o } x \geq \frac{\sqrt3}{2} \\ x<-2 \end{cases}$ o $\begin{cases} x \leq -\frac{\sqrt3}{2} \text{ o } x \geq \frac{\sqrt3}{2} \\ x \geq -2 \\ \cancel{4x^2}-3 > \cancel{4x^2}+16x+16 \end{cases}$

$-2<-\frac{\sqrt3}{2}$ perchè $\frac{\sqrt3}{2}<1$ $(2>\sqrt3)$

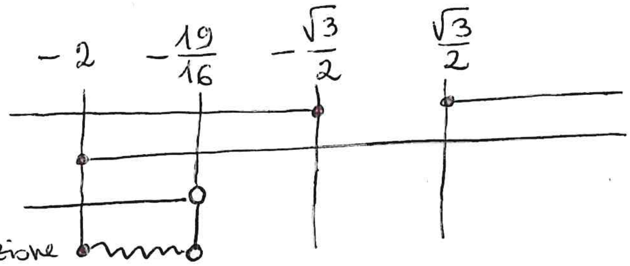
$\iff x<-2$ o $\begin{cases} x \leq -\frac{\sqrt3}{2} \text{ o } x \geq \frac{\sqrt3}{2} \\ x \geq -2 \\ 16x<-19 \to x<-\frac{19}{16} \end{cases}$

$-2<-\frac{19}{16}$ $\left(-2=-\frac{32}{16}\right)$

$-\frac{19}{16}<-1<-\frac{\sqrt3}{2}$
$\left(-\frac{16}{16}\right)$



intersezione



intersezione

$\iff x<-2$ o $-2 \leq x < -\frac{19}{16}$ $\iff$ unendo le sol.ni $x \in \left]-\infty, -\frac{19}{16}\right[$

ES. 2) <u>1° tratto</u> $y=1+\log(-x)$ definita per $-x>0$ cioè $x<0$

si tratta della funzione $f(x)=1+\log x$, il cui grafico è stato disegnato nell'es. i) in cui si sostituisce $x \to -x$ – Quindi $y=1+\log(-x)$ è il simmetrico di $y=1+\log x$ rispetto all'asse y.

Passa dunque per i punti $(-\frac{1}{e},0)$ $(-1,1)$ $(-e,2)$ $(-e^2,3)$; ha sempre $x=0$ come asintoto verticale.

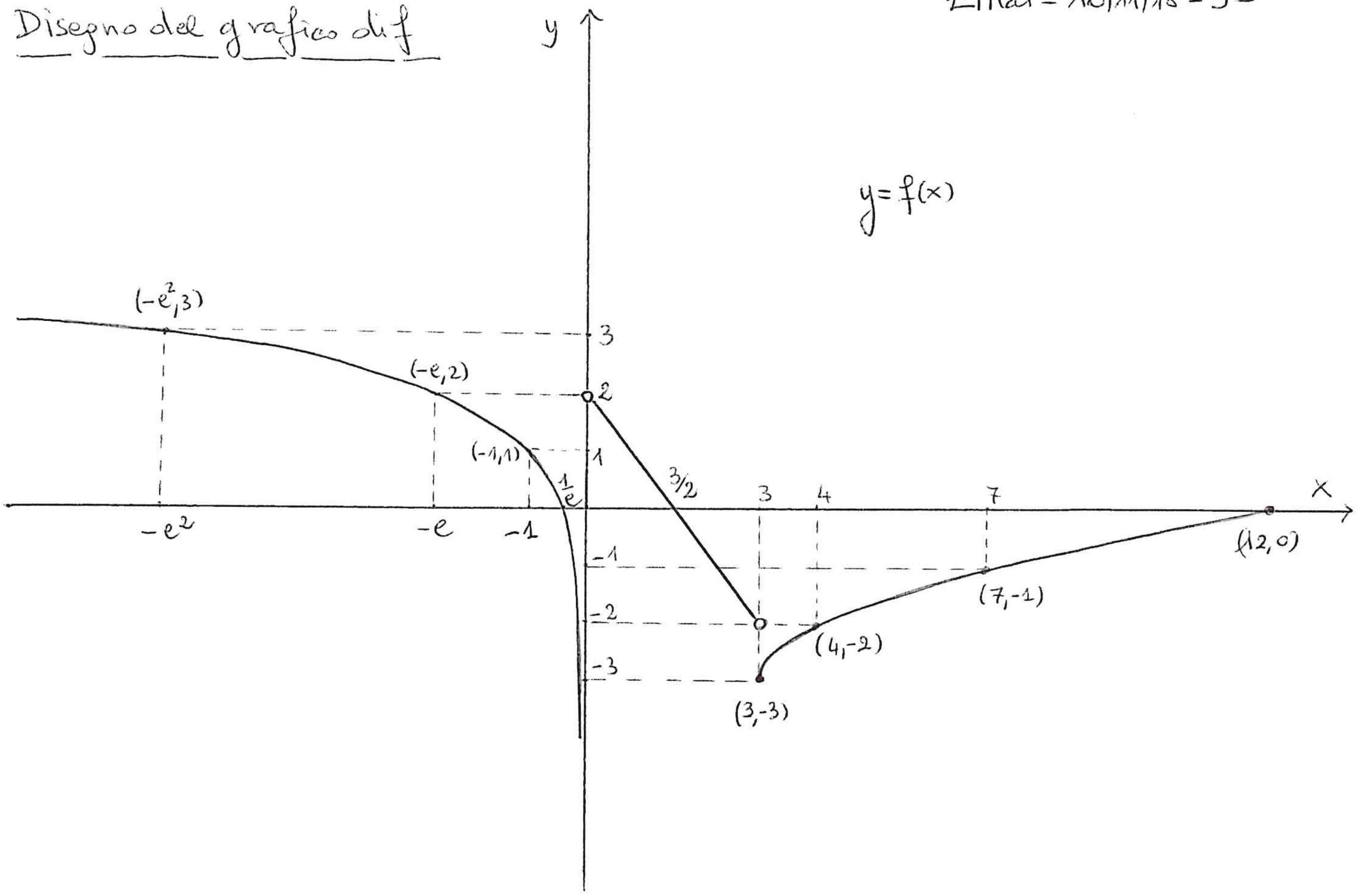
∩ asse x

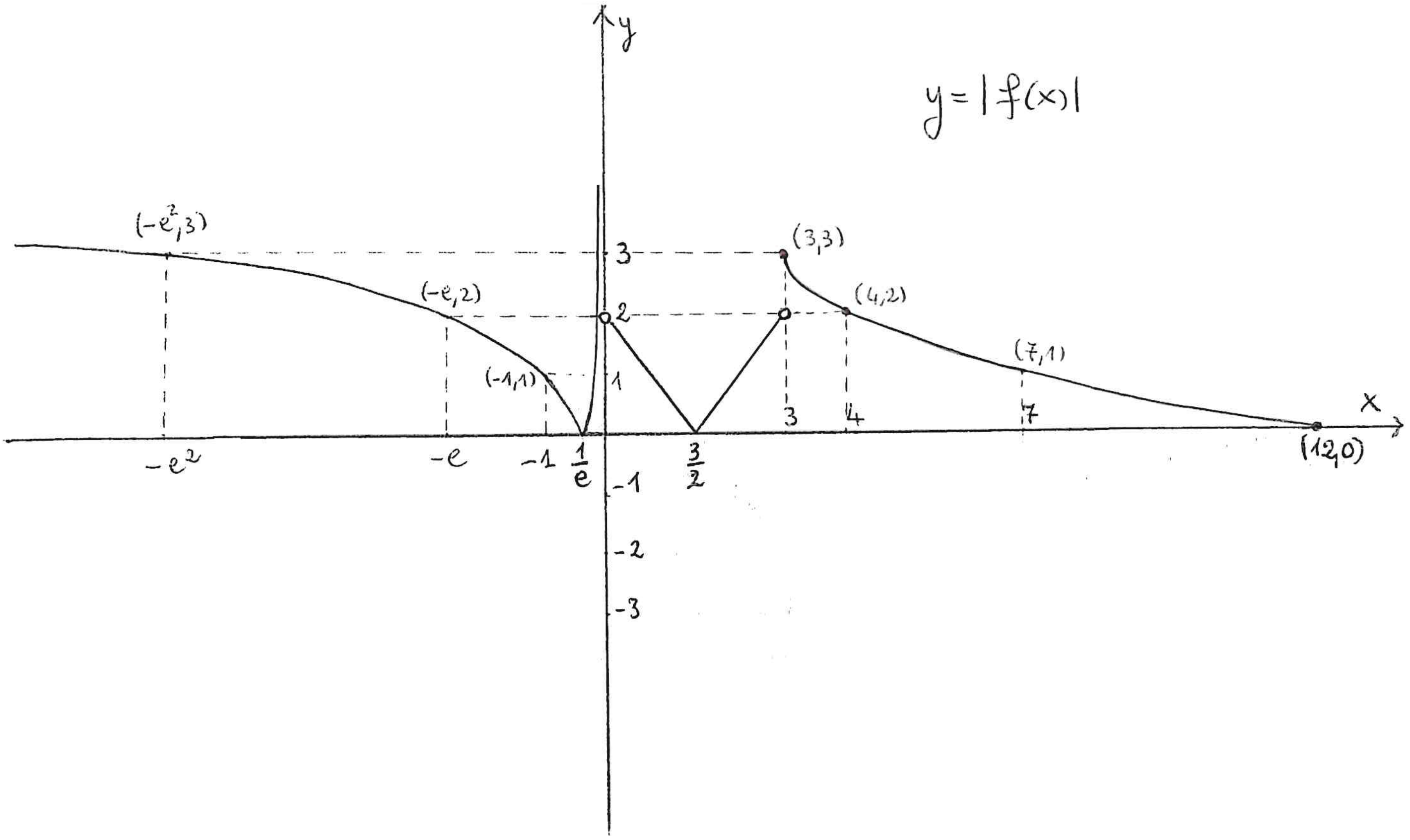
<u>2° tratto</u> il grafico è la retta di eq.ne $y=-\frac{4}{3}x+2$ (da disegnare solo per $(0<x<3)$ passante per $(0,2)$ $(\frac{3}{2},0)$ $(3,-2)$.

∩ asse x

<u>3° tratto</u> è la funzione $g(x)$ studiata al punto i) da disegnare per $3 \leq x \leq 12$, $g(12)=0$.

Disegno del grafico di f





ES.4) $y = a(x-x_v)^2 + y_v$

Poichè la parabola interseca l'asse delle ascisse in $(1,0)$ e $(3,0)$ risulta per simmetria che $x_v = 2$

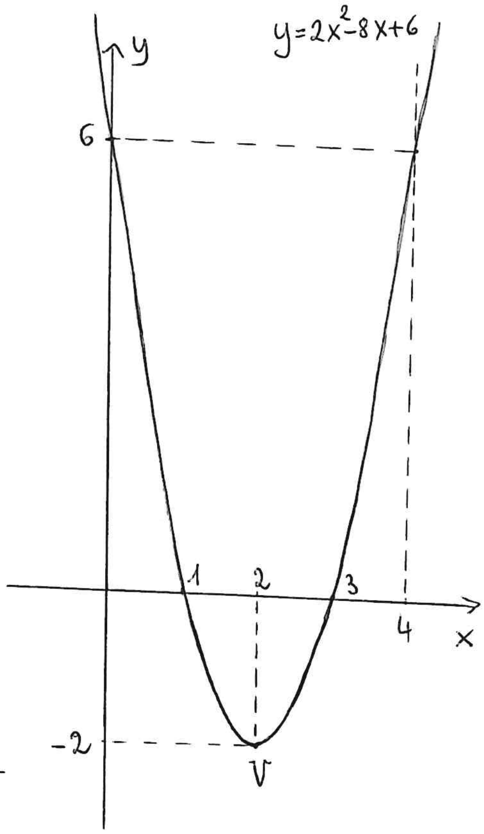
$\underline{y = a(x-2)^2 + y_v}$

Imponiamo il passaggio per $(1,0)$ (per $(3,0)$ si ottiene la stessa eq.^{ne}) e per $(0,6)$. Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 0 = a + y_v \\ 6 = 4a + y_v \end{cases} \quad \begin{cases} a + y_v = 0 \\ 4a + y_v = 6 \end{cases} \quad \underline{2^a - 1^a} \begin{cases} 3a = 6 \\ y_v = -a \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2 \\ y_v = -2 \end{cases}$$

Eq.^{ne} della parabola $y = 2(x-2)^2 - 2$ o $y = 2x^2 - 8x + 6$

La concavità è verso l'alto.



ES.5) $2y^2 - x^2 + 2 = 0 \iff 2y^2 - x^2 = -2$

$\iff x^2 - 2y^2 = 2 \iff \dfrac{x^2}{2} - y^2 = 1$

Si tratta di un'iperbole riferita agli asintoti con $\cap$ asse x in $(\pm\sqrt{2}, 0)$, $\cap$ asse y $\emptyset$, asintoti $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$

PUNTI: $(2, \pm 1)$ $(-2, \pm 1)$ $(\pm\sqrt{10}, \pm 2)$ $\sqrt{10} \simeq 3{,}16$

Infatti $\cap\ x = -2$ $\begin{cases} y^2 = \frac{x^2}{2} - 1 \\ x = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 = 1 \\ x = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} y = \pm 1 \\ x = -2 \end{cases}$

$\cap\ y = -1$ $\begin{cases} x^2 = 2y^2 + 2 \\ y = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 = 4 \\ y = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm 2 \\ y = -1 \end{cases}$ e analogamente per $x = 2$ e per $y = 1$