COGNOME ______________	NON SCRIVETE QUI
NOME ______________	
MATRICOLA |_|_|_|_|_|_|	1 2 3 4 5 6
CORSO SEGUITO Mat Fis	

UNIVERSITÀ DI PARMA — C.L. in Matematica e Fisica

ESAME DI ELEMENTI DI MATEMATICA

A.A. 2018-2019 — PARMA, 29 GENNAIO 2019

ElMat-29/1/19 -1-

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo **in stampatello** cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

Svolgete prima i calcoli in brutta, poi svolgete ordinatamente gli esercizi su un altro foglio protocollo a quadretti, infine **copiate le sole risposte** su questo foglio.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo. Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare la risposta**.

Svolgimento es0) a) b) c) a pag. 4

0) **PARTE PRELIMINARE** Completate:

a) Se $f(x) = \frac{1}{2}\log(x^2) \cdot \sqrt{81 - 4x^2} + \log(-\frac{1}{2}x - 3x + 1)$

allora:

$\mathrm{dom}\, f = \ldots \left[-\frac{9}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{2}{7}\right[$

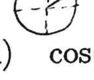
b) Dati i due insiemi $A =]-7, \frac{22}{7}]$, $B =]-\infty, -4\sqrt{3}] \cup]\frac{10}{3}, 6]$, allora:

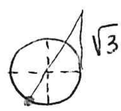
$A \cup B = \ldots]-\infty, \frac{22}{7}] \cup]\frac{10}{3}, 6]$ $\qquad B \setminus A = \ldots]-\infty, -7] \cup]\frac{10}{3}, 6]$

(sono richiesti i calcoli di tutti i confronti necessari, senza utilizzare i numeri decimali).

c) $\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \ldots \begin{cases} f(x) \geq 0 & (\text{C.E.}) \\ g(x) \geq 0 & (\text{Se } g(x) < 0 \text{ l'eq.}^{ne} \text{ è IMPOSSIBILE}) \\ f(x) = (g(x))^2 \end{cases}$

$\sqrt{3 - 2x} = -x \iff \ldots x = -3$





d) $\cos(-\frac{11}{6}\pi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \mathrm{sen}(\frac{7}{2}\pi) = -1$ $\qquad \tan(\frac{4}{3}\pi) = \sqrt{3}$

(è richiesto il disegno di ogni angolo).

$(a^n)^m = a^{n\cdot m}$ $\quad$ $m \log a = \log a^m$

e) $(e^3)^{-\log 2} - \log(e^2) = \ldots e^{-3\log 2} - 2 = e^{\log 2^{-3}} - 2 = e^{\log \frac{1}{8}} - 2 = \frac{1}{8} - 2 = \boxed{-\frac{15}{8}}$

$\log e^x = x \ \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad$ $e^{\log x} = x \ \forall x > 0$

f) L'ellisse di centro $(-1, 1)$ e semiassi 8 , 4 ha equazione … $\frac{(x+1)^2}{64} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$

Svolgim. p. 4-5

I punti dell'ellisse aventi ascissa 3 sono … $(3, 1-2\sqrt{3})$ $(3, 1+2\sqrt{3})$

La circonferenza di centro $(0, 0)$ passante per il punto dell'ellisse di ordinata maggiore ha raggio … $R = \sqrt{26} = \text{dist}((0,0),(-1,5))$

Svolg. pag. 5

g) Determinate e disegnate tutte le soluzioni $x \in [0, 2\pi]$ dell'equazione

$(\cos^2 x - 1)(2\cos x + \sqrt{3}) = 0 \iff \ldots x = 0$ o $x = \frac{5}{6}\pi$ o $x = \pi$ o $x = \frac{7}{6}\pi$ o $x = 2\pi$

Svolg. p. 5

h) $\dfrac{\log_2(2x) - 2}{x - 3} \leq 0 \iff \ldots x \in [2, 3[$

i) Disegnate sul foglio a quadretti con precisione (dominio, equazione del grafico, tutti i passaggi necessari per la costruzione, intersezioni con gli assi coordinati, punti significativi, asintoti) il grafico delle seguenti funzioni:

$f(x) = 3 - e^x$, $\qquad g(x) = \log x$.

Svolgim. pag 5-6

Svolgim. pag. 6

1) Risolvete la disequazione $|3x^2 - 4| < 11x$. $\quad$ R. $x \in]\frac{1}{3}, 4[$

---

2) a) Disegnate con precisione sul foglio a quadretti il grafico della seguente funzione (in parte disegnata nella parte preliminare punto i)), specificando l'equazione del grafico di ogni tratto, tutti i passaggi necessari per la costruzione di ogni tratto, le coordinate dei punti di intersezione con gli assi cartesiani, gli asintoti e eventuali altri punti significativi:

Svolgim. a pag. 6-7

$$f(x) = \begin{cases} \log(-x) & \text{se } -e^2 \leq x < 0 \\ 3 - e^x & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x + 2 & \text{se } 2 < x \leq 8 \end{cases}$$

dom $f = [-e^2, 8]$ $\qquad$ Imm $f =]-\infty, 2]$

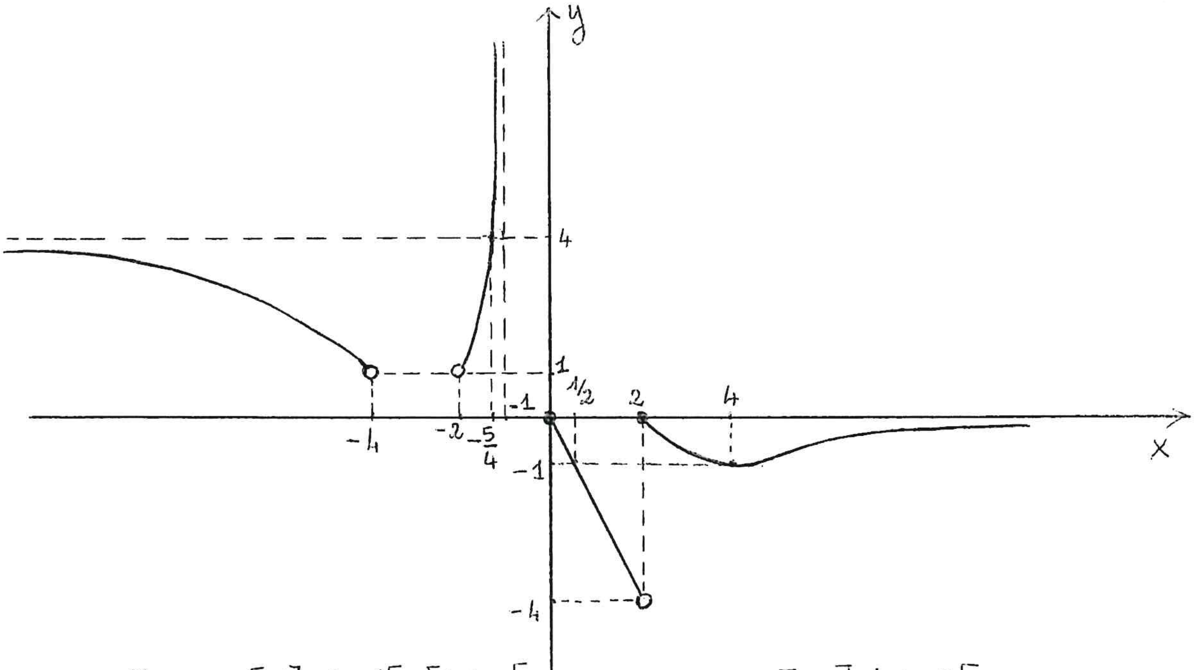
$f(1) = 3 - e \simeq 0{,}3$ $\qquad$ $f^{-1}(0) = \{-1, \log 3, 4\}$

$1 \in [0, 2]$ $f(x) = 3 - e^x$

b) Disegnate con precisione il grafico della funzione $g(x) = |f(x)|$.

---

3) Considerate la funzione f che ha il seguente grafico:



dom f =]$-\infty$, -4[∪]-2, -1[∪ [0, $+\infty$[, Imm f =]-4, 0] ∪]1, $+\infty$[

$f(-1) = \nexists$ $-1 \notin$ dom f $\quad$ $f(2) = 0$ $\quad$ $f^{-1}(-1) = \{\frac{1}{2}, 4\}$

Determinate il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$ per $k \in [-2, 0]$: $k \in [-2,-1[$ 1 sol.ne; $k = -1$ 2 sol.ni; $k \in]-1, 0[$ 3 sol.ni; $k = 0$ 2 sol.ni

La funzione f è decrescente su $[0, 2]$: VERO o ~~FALSO~~
(motivate la risposta sul foglio a quadretti). perchè $\frac{1}{2} < 2$ ma $f(\frac{1}{2}) = -1 < f(2) = 0$

(FISICA) Determinate $f(\,]-2, -5/4] \cup]2, +\infty[\,) = \ldots [-1, 0[\cup]1, 4]$

(MATEMATICA) Le soluzioni della disequazione $0 < f(x) \leq 4$ sono $x \in]-\infty, -4[\cup$ $\cup]-2, -5/4]$

(MATEMATICA) Scrivete sul foglio a quadretti la definizione di funzione strettamente decrescente per una funzione $f : \text{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Svolgim. a pag. 8

4) Determinate l'equazione della parabola (con asse parallelo all'asse y) di vertice $(6, 4)$ che passa per il punto $(4, 3)$.

Disegnate con precisione la parabola trovata sul foglio a quadretti.

---

5) **(FISICA - FACOLTATIVO)** Risolvete la seguente disequazione:

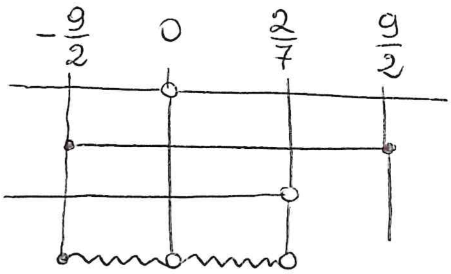
Svolgim. a p. 8

$$9x^4 - 19x^2 + 2 < 0 \, .$$

R. $x \in]-\sqrt{2}, -\frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{3}, \sqrt{2}[$

es.0) a) $\mathrm{dom} f = \{ x \in \mathbb{R} : \ x^2 > 0, \ 81 - 4x^2 \geq 0, \ -\frac{1}{2}x - 3x + 1 > 0 \}$

$$\begin{cases} x^2 > 0 \\ x^2 \leq \frac{81}{4} \\ -\frac{7}{2}x + 1 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \forall x \neq 0 \\ -\frac{9}{2} \leq x \leq \frac{9}{2} \\ \frac{7}{2}x < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq 0 \\ -\frac{9}{2} \leq x \leq \frac{9}{2} \\ x < \frac{2}{7} \end{cases}$$



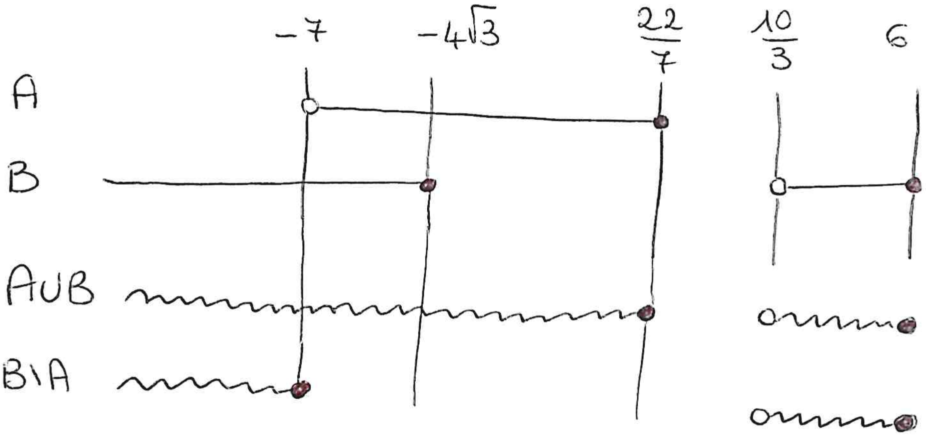
$\left(\frac{2}{7} < 1 < \frac{9}{2} \right)$ SOL.^{ne} del SISTEMA $x \in [-\frac{9}{2}, 0[\cup]0, \frac{2}{7}[$

$\mathrm{dom} f = [-\frac{9}{2}, 0[\cup]0, \frac{2}{7}[$

b) Dobbiamo confrontare -7 con $-4\sqrt{3}$ e $\frac{22}{7}$ con $\frac{10}{3}$, essendo $\frac{22}{7} < 4 < 6$ e $\frac{10}{3} < 4 < 6$.

1ª $-4\sqrt{3} > -7 \iff 4\sqrt{3} < 7 \overset{(\cdot)^2}{\iff} 48 < 49$ VERO $\Rightarrow \boxed{-4\sqrt{3} > -7}$

2ª $\frac{22}{7} < \frac{10}{3} \iff 22 \cdot 3 < 10 \cdot 7 \iff 66 < 70$ VERO $\Rightarrow \frac{22}{7} < 10/3$



A∪B: $]-\infty, \frac{22}{7}] \cup]\frac{10}{3}, 6]$

B\A: $]-\infty, -7] \cup]\frac{10}{3}, 6]$

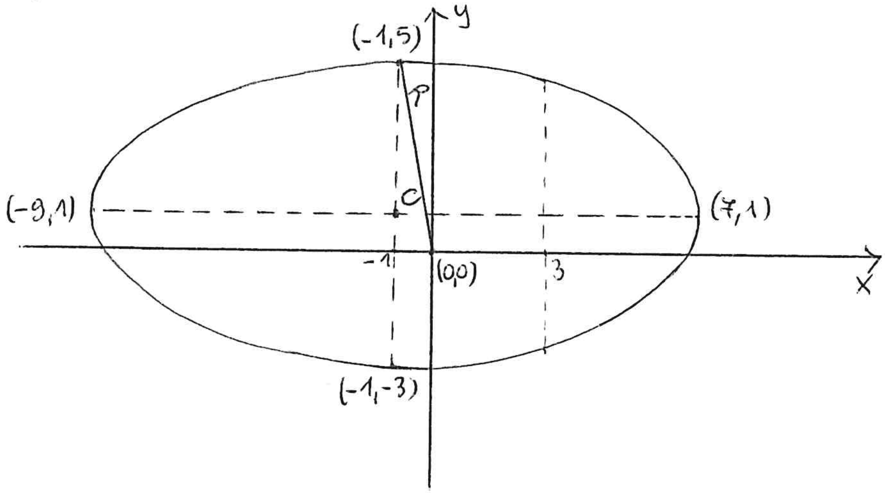
c) $\sqrt{3-2x} = -x \iff \begin{cases} 3 - 2x \geq 0 \\ -x \geq 0 \\ 3 - 2x = (-x)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x \leq 0 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4}}{1} = -1 \pm 2 \end{cases}$ $x_1 = -3$, $x_2 = 1$

$x = 1$ non è accettabile

SOL.^{ne} $\boxed{x = -3}$

f) Se $x = 3$ nell'eq.^{ne} otteniamo $\frac{(3+1)^2}{64} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$ da cui ricaviamo y

$$\frac{4^2}{64}+\frac{(y-1)^2}{16}=1 \qquad \frac{(y-1)^2}{16}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \qquad (y-1)^2=12 \qquad y=1\pm\sqrt{12}=1\pm2\sqrt{3}$$

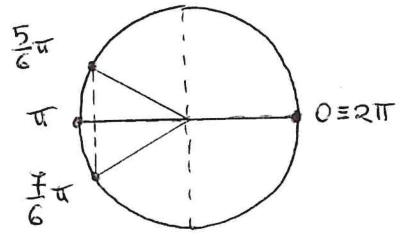


Il punto dell'ellisse di ordinata massima è $(-1,5)$ quindi la circonferenza ha $R=dist((0,0),(-1,5))=$
$=\sqrt{(-1)^2+5^2}=\sqrt{26}$

g) $(\cos^2 x-1)(2\cos x+\sqrt{3})=0 \iff$ (eq.^{ue} prodotto) $\cos^2 x-1=0$ o $2\cos x+\sqrt{3}=0$

$\iff \cos^2 x=1$ o $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos x=\pm1$ o $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\iff (x=0$ o $x=\pi$ o $x=2\pi)$ o $x=\frac{5}{6}\pi$ o $x=\frac{7}{6}\pi$



h) C.E. $\begin{cases}2x>0\\x-3\neq0\end{cases}$ $\begin{cases}x>0\\x\neq3\end{cases}$ C.E. $x\in]0,3[\cup]3,+\infty[$

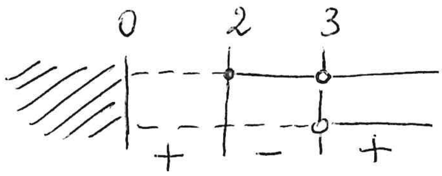
Dis.^{ne} fratta

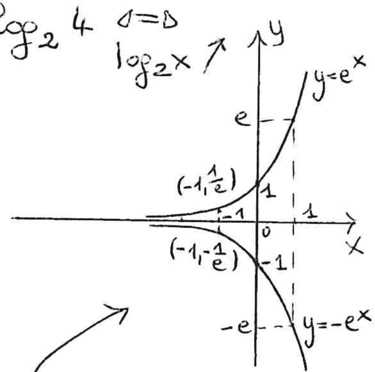
$N=\log_2(2x)-2\geq0 \iff \log_2(2x)\geq2 \iff \log_2(2x)\geq\log_2 4 \iff$ ($\log_2 x \nearrow$)

$2x\geq4 \iff x\geq2$

$D=(x-3)>0$ se $x>3$

$\frac{N}{D}\leq0 \iff 2\leq x<3$



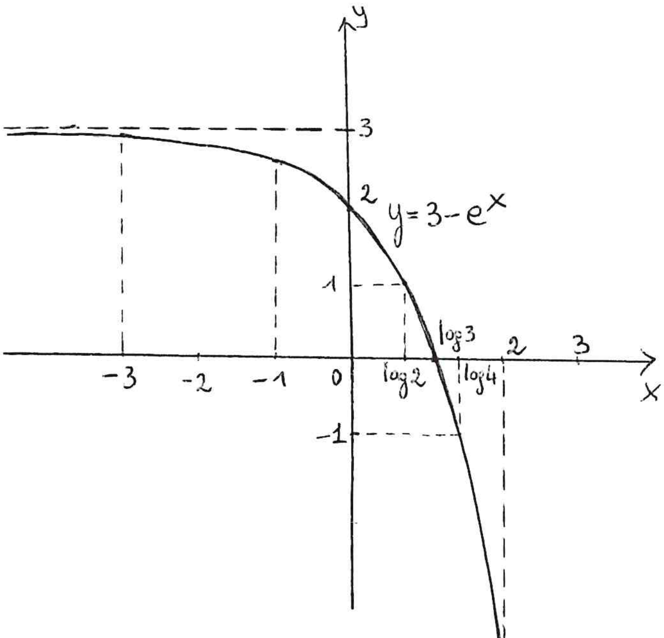


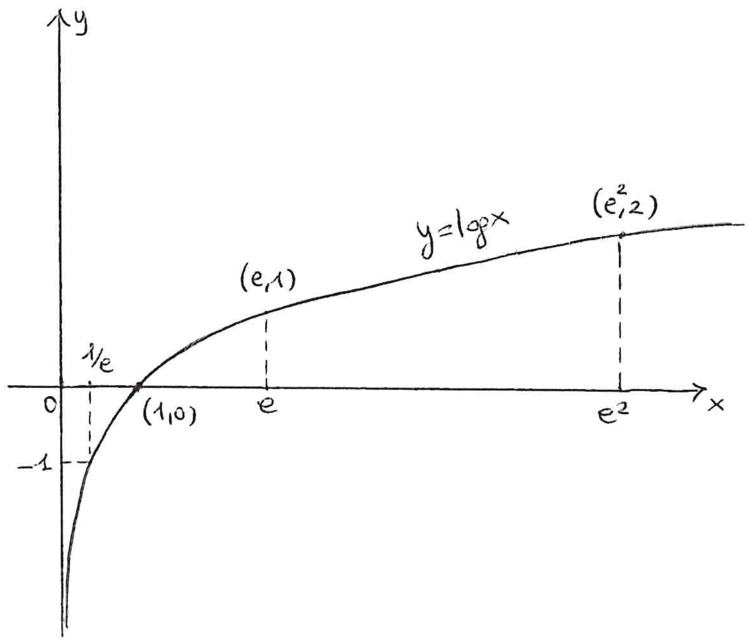
i) $f(x)=3-e^x$ dom$f=\mathbb{R}$ eq.^{ue} del grafico $y=3-e^x$: si tratta del grafico dell'esponenziale $y=e^x$ simmetrizzato rispetto all'asse x $(y=-e^x)$ e poi spostato in alto di 3.

$\cap$ asse y $(0,2)$ $\cap$ asse x se $3-e^x=0 \iff e^x=3 \iff x=\log 3 \simeq 1,1$

$g(x)=\log x$ dom$g=]0,+\infty[$ eq.^{ue} del grafico $y=\log x$ funzione nota

$\cap$ asse y : ϕ $\cap$ asse x $(1,0)$





PUNTI $(-3, 3-e^{-3})$ $(-1, 3-\frac{1}{e})$ $(0,2)$
$\simeq 2{,}95$ $\quad \simeq 2{,}6$

ASINTOTO orizzontale $y=3$

$(\log 2, 1)$ $(\log 3, 0)$ $(\log 4, -1)$ $(2, 3-e^2)$
$\simeq 0{,}7$ $\quad \simeq 1{,}1$ $\quad \simeq 1{,}4$ $\quad \simeq -4{,}4$

ALTRI PUNTI $(\frac{1}{e}, -1)$ $(e,1)$ $(e^2,2)$

ASINTOTO VERTICALE $x=0$

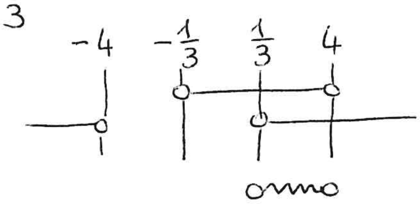
ES. 1) $|3x^2-4| < 11x \iff -11x < 3x^2-4 < 11x \iff \begin{cases} 3x^2-11x-4<0 \\ 3x^2+11x-4>0 \end{cases}$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121+48}}{6} = \frac{11 \pm 13}{6} \begin{array}{l} \nearrow -\frac{1}{3} \\ \searrow 4 \end{array}$$

$$x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121+48}}{6} = \frac{-11 \pm 13}{6} \begin{array}{l} \nearrow -4 \\ \searrow \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{3} < x < 4 \\ x < -4 \ \text{o} \ x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

$S \quad x \in \left]\frac{1}{3}, 4\right[$



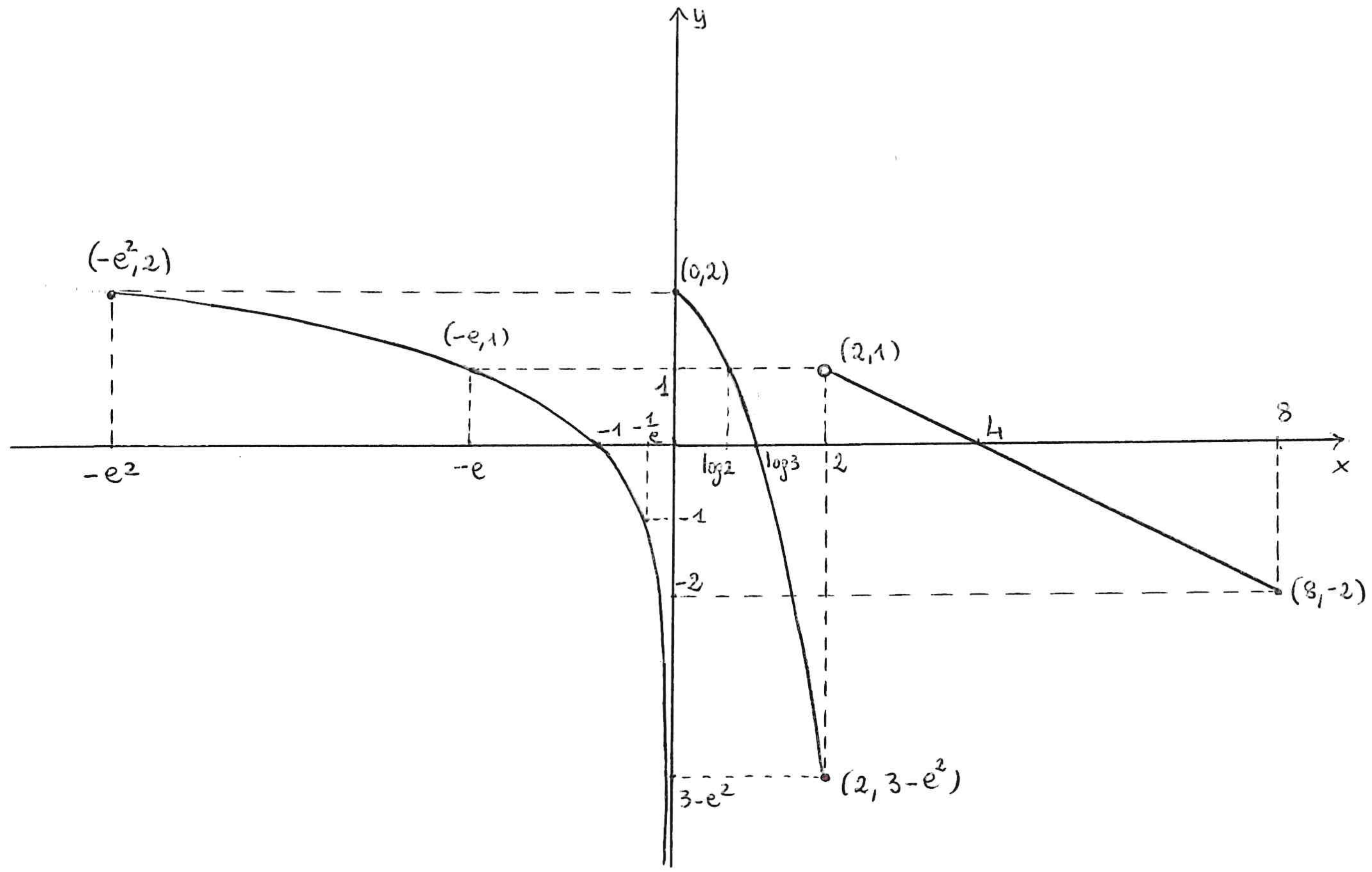
ES. 2) $y=\log(-x)$ è il simmetrico del grafico del logaritmo $y=\log x$ rispetto all'asse y - ASINTOTO VERTICALE $x=0$, $\cap$ asse y $\emptyset$ $\cap$ asse x $(-1,0)$

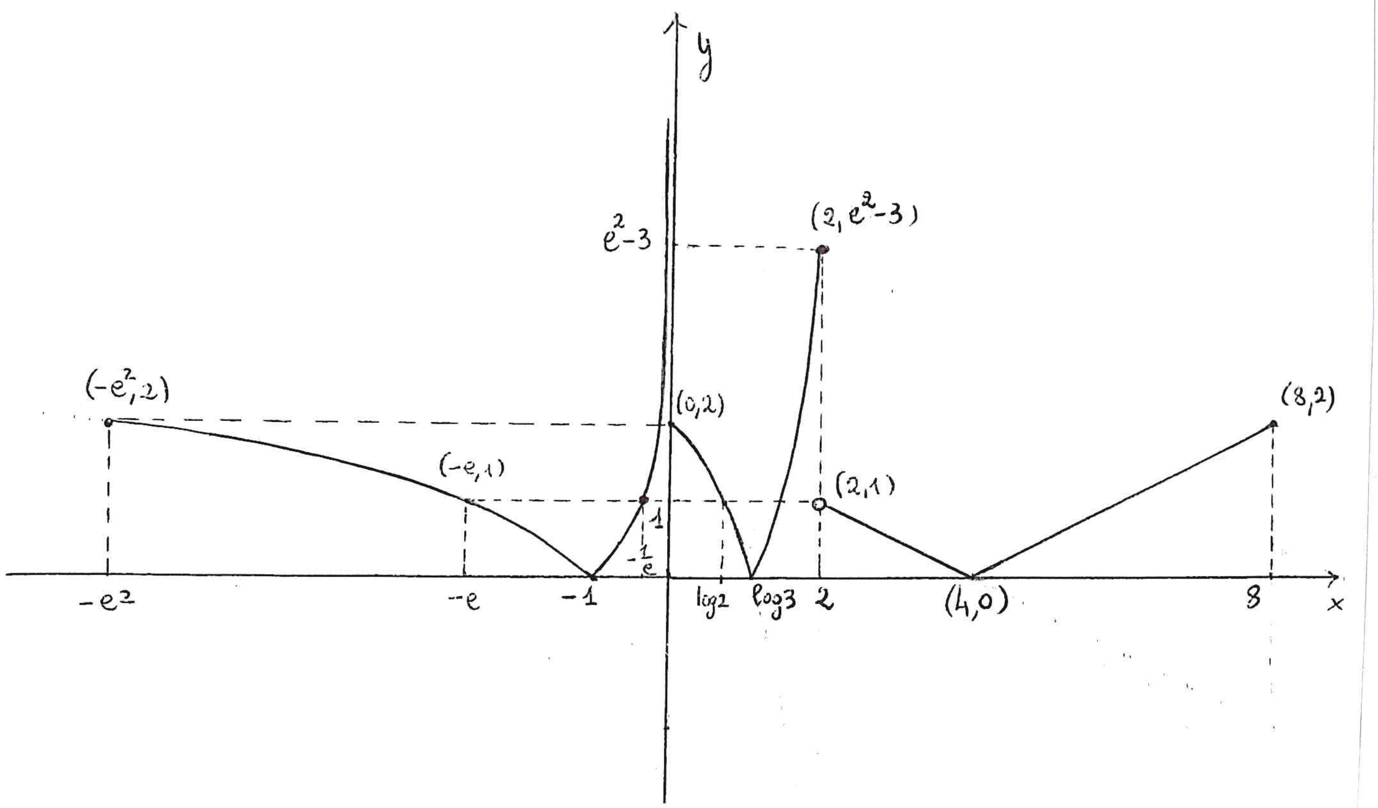
PUNTI $(-\frac{1}{e}, -1)$ $(-e, 1)$ $(-e^2, 2)$

$y=3-e^x$ è disegnato sopra e va considerato per $0 \le x \le 2$

$y=-\frac{1}{2}x+2$ è la retta di coeff. angolare $m=-\frac{1}{2}$ di cui va considerato il segmento di estremi $(2,1)$ e $(8,-2)$ - Il segmento $\cap$ asse x in $-\frac{1}{2}x+2=0$ $(4,0)$.

ElMat - 29/11/19 - 7





ES.4) $y = a(x-x_v)^2 + y_v$ con $(x_v, y_v) = V = (6,4)$

$y = a(x-6)^2+4$ imponendo il passaggio per $(4,3)$ si determina a

$3 = a(4-6)^2+4 \iff 4a = -1 \quad a = -\frac{1}{4}$

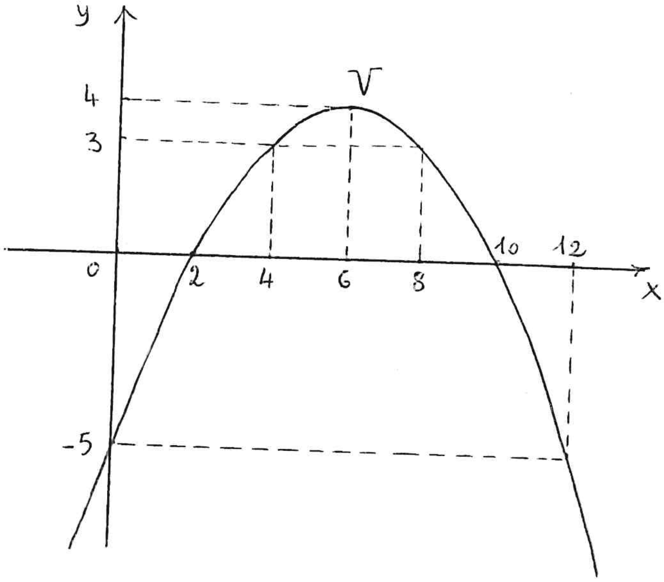
EQ.^{ne} $y = -\frac{1}{4}(x-6)^2+4$

oppure $y = -\frac{1}{4}x^2+3x-5$

$\cap$ asse y $(0,-5)$

$\cap$ asse x $(2,0)$ $(10,0)$

passa per $(4,3)$ e $(8,3)$
e per $(12,-5)$



ES.5) Si tratta di una diseq.^{ne} BIQUADRATICA

Posto $t = x^2$ otteniamo la diseq.^{ne} di 2° grado int:

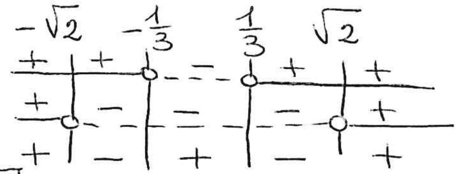
$\odot \quad 9t^2 - 19t + 2 < 0.$

L'eq.^{ne} $9t^2-19t+2=0$ ha sol.^{ni} $t_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{361-72}}{18} = \frac{19 \pm 17}{18}$ $\begin{matrix} \nearrow t_1 = \frac{1}{9} \\ \searrow t_2 = 2 \end{matrix}$ ($\sqrt{289}$)

da cui $9t^2-19t+2 = (9t-1)(t-2)$ che consente di riscrivere $\odot$ come una DIS.^{ne} PRODOTTO: $(9x^2-1)(x^2-2)<0$

$F_1 = (9x^2-1) > 0$ se $x^2 > \frac{1}{9}$ $\quad x < -\frac{1}{3}$ o $x > \frac{1}{3}$

$F_2 = x^2-2 > 0$ se $x < -\sqrt{2}$ o $x > \sqrt{2}$



$F_1 \cdot F_2 < 0 \iff \boxed{x \in \,]-\sqrt{2}, -\tfrac{1}{3}[\, \cup \,]\tfrac{1}{3}, \sqrt{2}[}$