COGNOME		NON SCRIVETE QUI	
NOME			
MATRICOLA		1 2 3 4 5	
CORSO SEGUITO	Matematica		

UNIVERSITÀ DI PARMA — C.L. in Matematica

ESAME DI ELEMENTI DI MATEMATICA

A.A. 2018-2019 — PARMA, 14 FEBBRAIO 2019

ElMat - 14/2/19 - Parte di Mat - 1 -

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo **in stampatello** cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di un'ora. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

Svolgete prima i calcoli in brutta, poi svolgete ordinatamente gli esercizi su questo foglio.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo. Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento**.

1) Negate la seguente proposizione

$$\forall\, \mathbf{x} < \mathbf{2} \quad \forall\, \mathbf{y} < -\mathbf{1} \quad \exists\, \mathbf{z} > \mathbf{0} : \qquad [\, \mathbf{P(x,y,z)} \ \ \mathbf{o} \ \ \mathbf{Q(x,y,z)} \,]$$

Risposta: ... $\exists x<2 \ \ \exists y<-1 : \ \forall z>0 \ \ [(\text{NON } P(x,y,z)) \ \underline{e} \ (\text{NON } Q(x,y,z))]$

2) Date la definizione di **insieme differenza**:

$$A \setminus B \quad = \quad \ldots \{x : x \in A \ \underline{e} \ x \notin B\}$$

3) Dati due numeri $a, b \neq 0$ trasformate e semplificate nel modo corretto l'espressione:

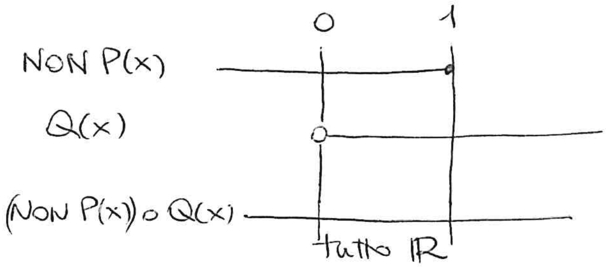
$$\frac{a\,(a-b)^2 \;-\; (ab-a^2)\,b}{a^2\,b^{-1}} = \ldots \frac{a(a^2+b^2-2ab)-ab^2+a^2b}{a^2}\cdot b =$$

$$= \frac{a^3+\cancel{ab^2}-2a^2b-\cancel{ab^2}+a^2b}{a^2}\cdot b = \frac{a^3-a^2b}{a^2}\cdot b = \frac{\cancel{a^2}(a-b)}{\cancel{a^2}}\cdot b = \boxed{ab-b^2}$$

4) Scrivete un esempio di proposizione VERA nella forma $[\ \forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{R} \quad (\mathbf{non}\,\mathbf{P}(\mathbf{x}))\ \mathbf{o}\ \mathbf{Q}(\mathbf{x})\ ]$.

Risposta: ... $P(x) =$ " $x > 1$ " $\qquad$ NON $P(x) =$ " $x \leq 1$ "

$Q(x) =$ " $x > 0$ "



$\forall x \in \mathbb{R}$ almeno una tra NON $P(x)$ e $Q(x)$ risulta VERA:
se $x \leq 0$ è VERA NON $P(x)$
se $0 < x \leq 1$ sono vere entrambe
se $x > 1$ è vera $Q(x)$.

5) Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, negate (svolgendo tutti i passaggi fino in fondo) la proposizione

$$[\ \exists\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}\ :\quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) > \mathbf{1}\ \ \mathbf{e}\ \ (\mathbf{f}(\mathbf{x}))^2 < \mathbf{4}\ ].$$

Risposta: ... $\forall x \in \mathbb{R}$ NON $\left(f(x) > 1 \ \underline{e}\ (f(x))^2 < 4 \right) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ NON$(f(x) > 1)$ $\underline{o}$ NON$((f(x))^2 < 4)$ $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq 1 \ \underline{o}\ (f(x))^2 \geq 4$

volendo proseguire $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq 1 \ \underline{o}\ (f(x) \leq -2 \ \underline{o}\ f(x) \geq 2)$

6) Dimostrate (con tutti i passaggi e le proprietà utilizzate) la formula seguente:

$$A \setminus (B \cap C) \ = \ (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Dimostrazione: ... Due insiemi F e G sono UGUALI $F = G \Longleftrightarrow \forall x \quad x \in F \Updownarrow x \in G$

Tesi $\forall x \quad x \in A \setminus (B \cap C) \Longleftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Dim. $\underline{x \in A \setminus (B \cap C)} \underset{\text{Def di INSIEME DIFFERENZA}}{\Longleftrightarrow} x \in A \ \underline{e}\ x \notin (B \cap C) \underset{\text{Def di } \notin}{\Longleftrightarrow} x \in A \ \underline{e}\ (\text{NON}\,(x \in B \cap C))$

$\underset{\text{Def di } \cap}{\Longleftrightarrow} x \in A \ \underline{e}\ (\text{NON}\,(x \in B \ \underline{e}\ x \in C)) \underset{\text{NON}(P \underline{e} Q) \Leftrightarrow (\text{NON}P) \underline{o} (\text{NON}Q)}{\Longleftrightarrow} x \in A \ \underline{e}\ (x \notin B \ \underline{o}\ x \notin C) \Longleftrightarrow$

$\underset{\text{PROPR. DISTRIBUTIVA di } \underline{e} \text{ rispetto a } \underline{o}}{\Longleftrightarrow} (x \in A \ \underline{e}\ x \notin B) \ \underline{o}\ (x \in A \ \underline{e}\ x \notin C) \underset{\text{DEF di DIFFERENZA}}{\Longleftrightarrow} (x \in A \setminus B) \ \underline{o}\ (x \in A \setminus C) \underset{\text{DEF di UNIONE}}{\Longleftrightarrow} \underline{x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)}$ c.v.d.

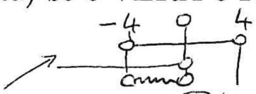
ElMat - 14/2/19 - Parte di Mat - 3

7) Considerate i due predicati:

$\mathbf{P(x)}: x^2 < 16$ **e** $x < 0$ $\qquad$ $\mathbf{Q(x)}: x \geq -\sqrt{15}$ **o** $x \geq -1$.

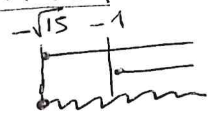
a) Dopo aver determinato quali valori di x rendono vera la proposizione $\mathbf{P(x)}$ e quali rendono vera $\mathbf{Q(x)}$, dite (motivando la risposta) se è VERA o FALSA la seguente proposizione

$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R} \qquad [\,\mathbf{P(x)} \Rightarrow \mathbf{Q(x)}\,]$.



Risposta: ... $P(x) =$ " $-4 < x < 4$ E $x < 0$ " $\quad$ $P(x)$ è vera per $\boxed{-4 < x < 0}$

$Q(x)$ è vera per $\boxed{x \geq -\sqrt{15}}$ poiché $-\sqrt{15} < -1 \Leftrightarrow \sqrt{15} > 1 \Leftrightarrow 15 > 1$ Vero

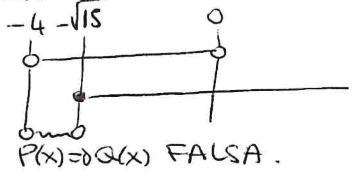


La proposizione $\forall x \in \mathbb{R}\ P(x) \Rightarrow Q(x)$ è FALSA

($-4 < -\sqrt{15} \Leftrightarrow 4 > \sqrt{15} \Leftrightarrow 16 > 15$ Vero)

perché

se $x \in]-4, -\sqrt{15}[$ $P(x)$ è VERA mentre $Q(x)$ è FALSA



$P(x) \Rightarrow Q(x)$ FALSA .

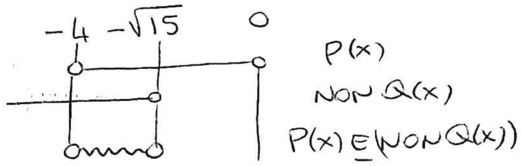
b) Scrivete prima la negazione teorica della proposizione assegnata, poi la negazione esplicita, infine rispondete alle domande.

Negazione teorica: .. $\exists x \in \mathbb{R}$: $P(x)$ E (NON $Q(x)$)

Negazione esplicita: ... $\exists x \in \mathbb{R}$: $(-4 < x < 0)$ E $(x < -\sqrt{15})$

Vera o falsa? ... VERA

Per quali valori di x ? ... $x \in]-4, -\sqrt{15}[$



8) **(FACOLTATIVO)** Date due funzioni $f: A \to B$, $g: B \to C$ dimostrate che se g NON è una funzione suriettiva, allora la composizione delle due funzioni NON è una funzione suriettiva.

Dimostrazione: ... IPOTESI g non è SURIETTIVA cioè $g(B) \neq C$

cioè $\exists$ almeno un $c \in C$ che non è immagine di nessun elemento di B

$\exists\, c \in C : \forall b \in B \ \ g(b) \neq c$.

TESI $(g \circ f)$ NON è SURIETTIVA cioè $(g \circ f)(A) \neq C$ cioè $\exists\, c \in C$:

$\forall a \in A \ \ (g \circ f)(a) \neq c$.

Dimostrazione Preso il $c \in C$ dell'ipotesi risulta: $\forall a \in A \ \ (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) \neq c$ per ipotesi.

detto $b = f(a) \in B$

c.v.d.