COGNOME ________	NON SCRIVETE QUI	
NOME ________		
MATRICOLA ⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌋	1 2 3 4 5	
CORSO SEGUITO Mat. Fis		

UNIVERSITÀ DI PARMA — C.L. in Matematica e Fisica

ESAME DI ELEMENTI DI MATEMATICA

A.A. 2018-2019 — PARMA, 14 FEBBRAIO 2019

ElMat - 14/2/19 - 1 -

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo **in stampatello** cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

Svolgete prima i calcoli in brutta, poi svolgete ordinatamente gli esercizi su un altro foglio protocollo a quadretti, infine **copiate le sole risposte** su questo foglio.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo. Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia risposta**.

0) **PARTE PRELIMINARE** Completate:

a) Determinate l'insieme A delle soluzioni della disequazione

a pag. 4

$$x^5 - 5x^4 - x^3 + 5x^2 > 0$$

Risposta: $A = \ldots]-1,0[\cup]0,1[\cup]5,+\infty[$

b) Dati i due insiemi $A =]-\infty, -7[\cup]2, \frac{25}{9}]$, $B = [-2\sqrt{13}, \frac{28}{11}[$, allora:

a pag. 4

$A \cap B = \ldots [-2\sqrt{13}, -7[\cup]2, \frac{28}{11}[$ $\quad A \setminus B = \ldots]-\infty, -2\sqrt{13}[\cup [\frac{28}{11}, \frac{25}{9}]$

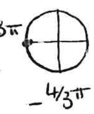
(sono richiesti i calcoli di tutti i confronti necessari, senza utilizzare i numeri decimali).

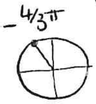
c) $|f(x)| \geq g(x) \iff \ldots f(x) \geq g(x)$ o $f(x) \leq -g(x)$

a pag. 5

$|1-2x| \geq 3 \iff \ldots x \in]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$

$|x| \geq -1 \iff \ldots \forall x \in \mathbb{R}$ perchè $|x| \geq 0 \geq -1$ sempre

d) $\text{sen}(-\frac{4}{3}\pi) = \ldots \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos(3\pi) = \ldots -1$  $\quad \tan(\frac{3}{4}\pi) = \ldots -1$ 

(è richiesto il disegno di ogni angolo). 

a pag.5

e) $\log_3(\frac{1}{9}) + \log_5(e^{2\log 5}) = ..0$

f) La retta r per $(6,1)$ e $(0,8)$ ha equazione $y=-\frac{7}{6}x+8$, coefficiente angolare $m=-\frac{7}{6}$

a pag.5 e interseca l'asse x nel punto $\ldots(\frac{48}{7},0)$

L'equazione $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x$ rappresenta una parabola

avente le seguenti caratteristiche $V(6,6)$, concavità verso il basso, $\cap$ asse x $(0,0)$ $(12,0)$

Disegnate con precisione sul foglio a quadretti sia la retta sia la figura rappresentata dalla seconda equazione.

g) Determinate e disegnate tutte le soluzioni $x \in [0\,,\,2\pi]$ dell'equazione

a pag.6 $2\,\mathrm{sen}^3 x + \mathrm{sen}^2 x - \mathrm{sen}\, x = 0 \iff x=0$ o $x=\pi$ o $x=2\pi$ o $x=\frac{3}{2}\pi$ o $x=\frac{\pi}{6}$ o $x=\frac{5}{6}\pi$

h) $\log_{10}(x-2) + \log_{10}(2x-3) = \log_{10} 3 \iff ..x=3$

a pag.6

i) Disegnate sul foglio a quadretti con precisione (dominio, equazione del grafico, tutti i passaggi necessari per la costruzione, intersezioni con gli assi coordinati, punti significativi, asintoti) il grafico delle seguenti funzioni:

a pag.6, 7

$f(x) = -2 + \sqrt{x+8}\,, \qquad g(x) = e^{-x} - 1\,.$

---

a pag. 7

1) $\sqrt{f(x)} < g(x) \iff \ldots \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) < (g(x))^2 \end{cases}$

$\sqrt{x^2 - 4x + 3} < 3 - 2x \iff \ldots\ x \in]-\infty, 1]$

---

2) a) Disegnate con precisione sul foglio a quadretti il grafico della seguente funzione (in parte disegnata nella parte preliminare punto i)), specificando l'equazione del grafico di ogni tratto, tutti i passaggi necessari per la costruzione di ogni tratto, le coordinate dei punti di intersezione con gli assi cartesiani, gli asintoti e eventuali altri punti significativi:

a pag.7-8

$$f(x) = \begin{cases} -2 + \sqrt{x+8} & \text{se } -8 \leq x < -4 \\ \frac{1}{2}x + 1 & \text{se } -4 \leq x < -1 \\ 1 - e^{-x} & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

$\mathrm{dom}\, f = [-8,+\infty[\qquad \mathrm{Imm}\ f = [-2,1[$

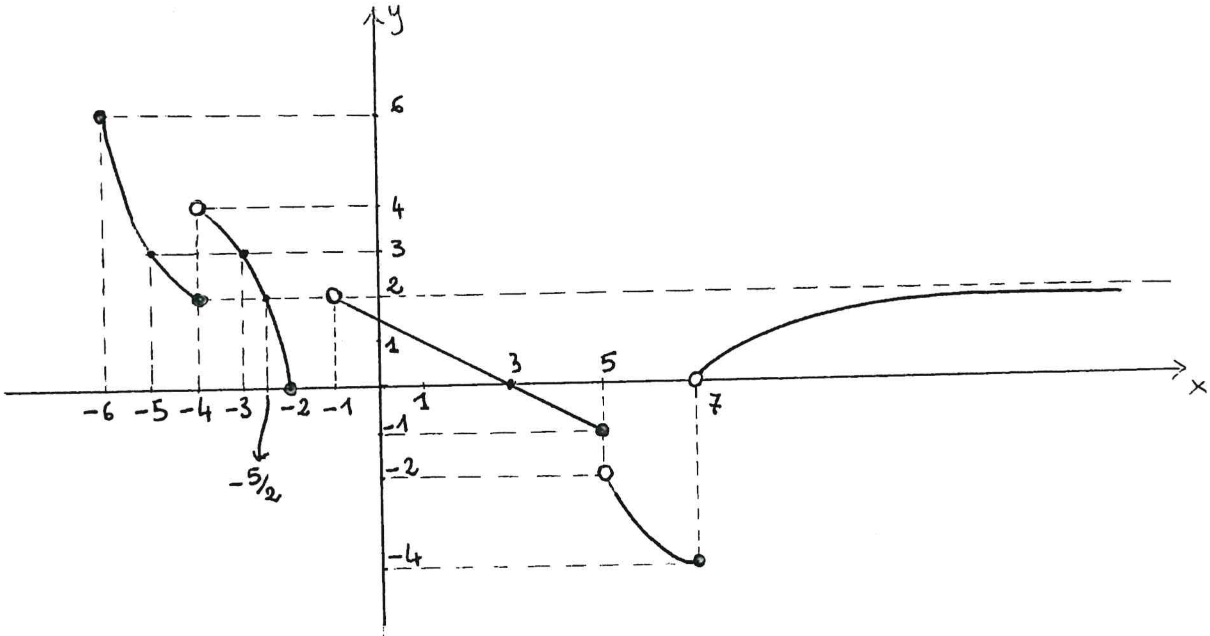
$f(1) = 1-\frac{1}{e} \qquad f^{-1}(-1) = \{-7, -4, -\log 2\}$

$x=1 \in 3°$ tratto

b) Disegnate con precisione il grafico della funzione $g(x) = |\,f(x)\,|$.

---

3) Considerate la funzione f che ha il seguente grafico:



dom $f =$ [-6,-2] ∪]-1,+∞[Imm $f =$ [-4,-2[∪ [-1, 6]

$f(-4) =$ 2 $f(-\frac{3}{2}) =$ ∄ $-3/2 \notin \text{dom} f$ $f^{-1}(0) =$ {-2, 3}

Determinate il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$ per $k \in [0,4]$:
K=0 2 sol.ni
K∈]0,2[3 sol.ni
K∈[2,4[2 sol.ni
K=4 1 sol.ne

La funzione f è iniettiva per $x \in [-6, -3]$: VERO o FALSO
(motivate la risposta sul foglio a quadretti). ad es. $f(-5)=f(-3)=3$ mentre se fosse INIETTIVA se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

(FISICA) Determinate $f(\,[-6,-5/2\,[\cup]\,7,+\infty[\,) =$ [2,6] ∪]0,2[=]0,6]

(MATEMATICA) Le soluzioni della disequazione $0 \le f(x) < 2$ sono $x \in]-\frac{5}{2},-2] \cup]-1,3] \cup]7,+\infty[$

(MATEMATICA) Scrivete sul foglio a quadretti la definizione di funzione iniettiva per una funzione $f : \text{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Data una funzione $f:\text{dom}f \subseteq \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f si dice INIETTIVA se $\forall x_1, x_2 \in \text{dom}f$ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

---

4) L'insieme di equazione $100 - 20\,x + y^2 + 20\,y + x^2 = 0$ rappresenta la circonferenza avente le seguenti caratteristiche: C(10,-10) e raggio R=10

a pag. 9

Disegnate con precisione l'insieme trovato sul foglio a quadretti.

---

5) **(FISICA - FACOLTATIVO)** Risolvete la seguente equazione:

a pag. 9

$$9^x - 3^x - 2 = 0\,.$$

ElMat - 14|12|19 - 4

SOLUZIONE

es.0) a) $x^2 \cdot (x^3 - 5x^2 - x + 5) > 0$

$x_0 = 1$ è radice del polinomio $P(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$ quindi

$P(x) = (x-1)(x^2 - 4x - 5)$

Allora la disequazione diventa $x^2 \cdot (x-1)(x^2-4x-5) > 0$

e si tratta di una disequazione prodotto $F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 > 0$

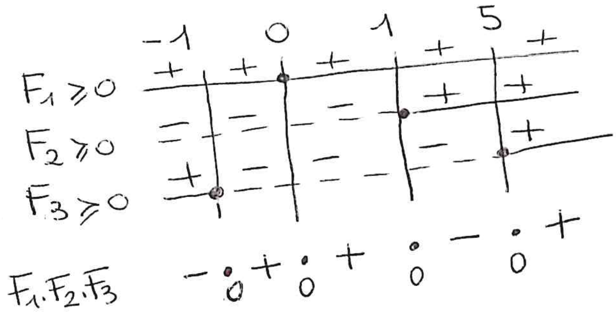
$F_1 = x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0 \qquad F_1 = 0$ se $x = 0$

$F_2 = x - 1 > 0 \quad x > 1 \qquad F_2 = 0$ se $x = 1$

$F_3 = x^2 - 4x - 5 > 0 \qquad F_3 = 0$ se $x = -1$ o $x = 5$

$(x+1)(x-5) > 0$

$x < -1$ o $x > 5$



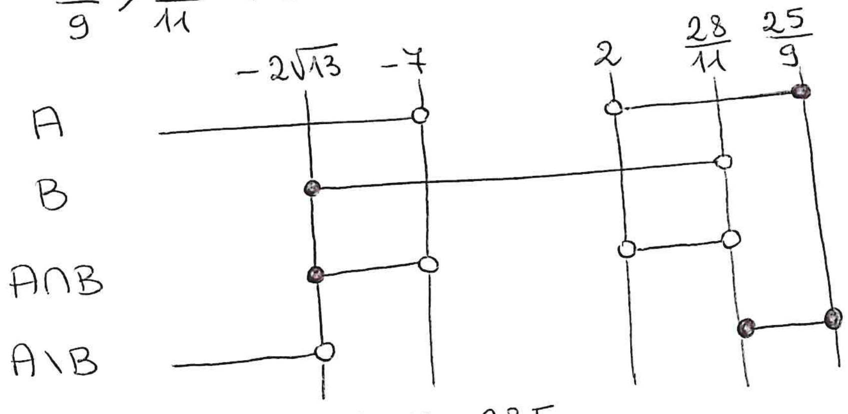
$F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 > 0$ se $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]5, +\infty[$.

b) Essendo chiaramente sia $\frac{25}{9}$, sia $\frac{28}{11}$ maggiori di 2 ($2 = \frac{18}{9}$ e $2 = \frac{22}{11}$) dobbiamo confrontare -7 con $-2\sqrt{13}$ e $\frac{25}{9}$ con $\frac{28}{11}$.

$-7 < -2\sqrt{13} \iff 7 > 2\sqrt{13} \overset{\text{elevando } (\cdot)^2}{\iff} 49 > 4 \cdot 13 = 52$ Falso

allora $\boxed{-2\sqrt{13} < -7}$

$\frac{25}{9} > \frac{28}{11} \iff 25 \cdot 11 > 28 \cdot 9 \iff 275 > 252$ vero $\quad \boxed{\frac{25}{9} > \frac{28}{11}}$



$A \cap B = [-2\sqrt{13}, -7[\cup]2, \frac{28}{11}[$

$A \setminus B =]-\infty, -2\sqrt{13}[\cup [\frac{28}{11}, \frac{25}{9}]$

c) $|1-2x| \geq 3 \iff 1-2x \geq 3$ o $1-2x \leq -3$

$\iff 2x \leq -2$ o $2x \geq 4$

$\iff x \leq -1$ o $x \geq 2$

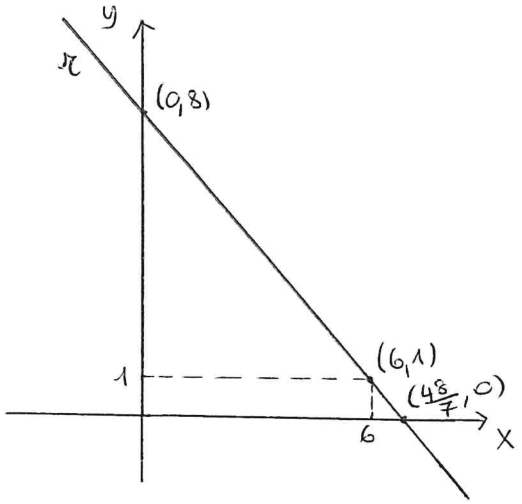
SOL.^{ni} $x \in]-\infty,-1] \cup [2,+\infty[$

e) $\log_3\left(\frac{1}{9}\right) + \log_5\left(e^{2\log 5}\right) = \log_3 3^{-2} + \log_5\left(e^{\log 5^2}\right) =$

$n \log_a b = \log_a b^n$

$= -2$ (per def di $\log_3$) $+ \log_5 5^2$ ($e^{\log x} = x \ \forall x>0$) $= -2 + 2$ (def di $\lg_5$) $= \boxed{0}$

f)



$m_r = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{7}{6}$

$y = -\frac{7}{6}x + 8$

$\cap$ asse x : $0 = -\frac{7}{6}x + 8 \quad \frac{7}{6}x = 8$

$x = \frac{48}{7} \simeq 6{,}86$

L'eq.^{ne} $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x$ rappresenta una PARABOLA di

$V(6,6) \quad x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-\frac{1}{3}} = +6$

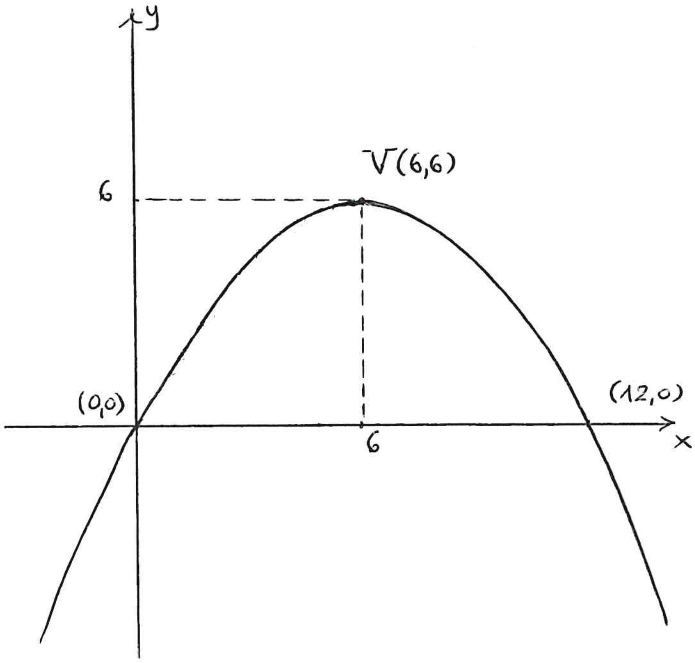
$y_v = -\frac{1}{6}(6)^2 + 2 \cdot 6 = -6 + 12 = 6$

$\cap$ asse x $\quad -\frac{1}{6}x^2 + 2x = 0$

$x\left(-\frac{1}{6}x + 2\right) = 0$

$x = 0$ o $x = 12$

$(0,0) \quad (12,0)$



ElMat - 14/12/19 - 6

g) $\operatorname{sen} x\,(2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1) = 0 \iff \operatorname{sen} x = 0$ o $2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$

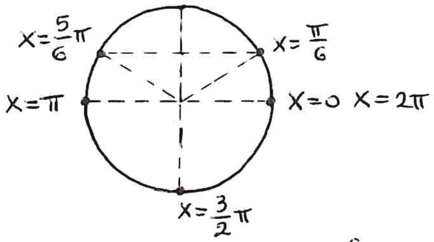
$x=0 \quad x=\pi \quad x=2\pi$

$t = \operatorname{sen} x \qquad 2t^2+t-1=0 \quad (t+1)(2t-1)=0$

quindi $\quad 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \iff (\operatorname{sen} x + 1)(2\operatorname{sen} x - 1) = 0$

$\iff \operatorname{sen} x = -1$ o $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{3}{2}\pi \qquad x = \frac{\pi}{6} \quad x = \frac{5}{6}\pi$



h) $\log_{10}(x-2) + \log_{10}(2x-3) = \log_{10} 3 \qquad$ C.E. $\begin{cases} x-2>0 \\ 2x-3>0 \end{cases} \begin{cases} x>2 \\ x>\frac{3}{2} \end{cases}$

Poiché $\log_a b + \log_a c = \log_a b \cdot c \quad \forall\, b>0,\ c>0 \qquad$ C.E. $x \in \,]2,+\infty[$

risulta $\log_{10}[(x-2)(2x-3)] = \log_{10} 3$.

Essendo $\log_{10} x$ una funzione iniettiva $\quad \log_{10} a = \log_{10} b \iff a = b$

da cui possiamo passare agli argomenti

$$2x^2-7x+6=3 \iff 2x^2-7x+3=0$$

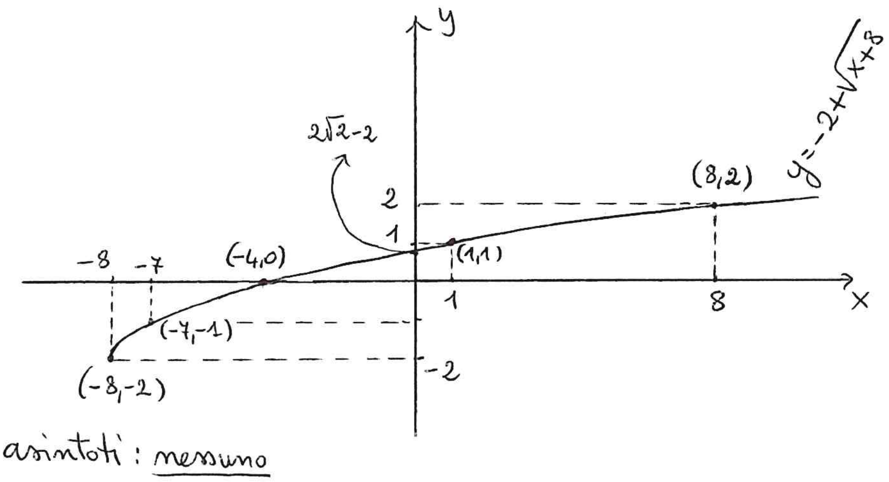
$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{4} = \frac{7\pm 5}{4} \quad \begin{array}{l} \nearrow x_1 = \frac{1}{2} \text{ NON ACCETTABILE } \notin \text{C.E.} \\ \searrow x_2 = 3 \text{ ACCETTABILE} \end{array}$$

Unica sol.^{ne} dell'eq.^{ne} $\boxed{x=3}$

i) $f(x) = -2+\sqrt{x+8} \qquad \operatorname{dom} f = [-8,+\infty[\quad (\{x \in \mathbb{R} : x+8 \geq 0\} = \operatorname{dom} f)$

eq.^{ne} del grafico $y = -2+\sqrt{x+8}$

Si tratta del grafico della funzione radice $y=\sqrt{x}$ spostato a sinistra di 8 e in basso di 2

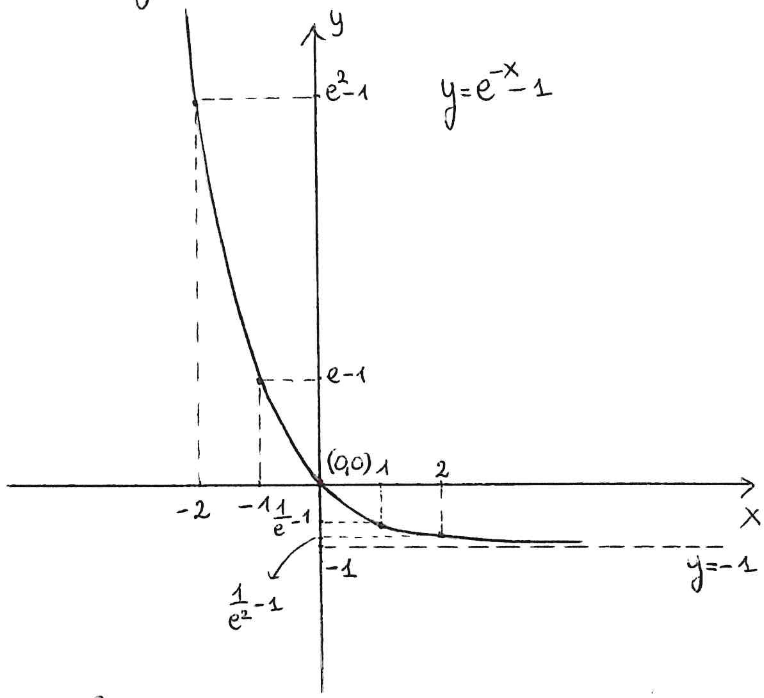


PUNTI $(-8,-2) \quad (-7,-1)$
$(-4,0) \quad (0,-2+2\sqrt{2})$
$(1,1) \quad (8,2)$

$\cap$ asse x $(-4,0) \quad \cap$ asse y $(0,-2+2\sqrt{2}) \qquad$ asintoti: <u>nessuno</u>

ElMat - 14/2/19 - 7

$g(x)=e^{-x}-1$ dom $g=\mathbb{R}$ eq.ne del grafico $y=e^{-x}-1$: si tratta del grafico dell'esponenziale $y=e^{x}$ simmetrizzato rispetto all'asse y ($y=e^{-x}$) e poi abbassato di 1.



PUNTI $(-2, e^{+2}-1)$ $(-1, e-1)$
$\approx 6{,}4$ $\approx 1{,}7$

$(0,0)$ $(1, \frac{1}{e}-1)$ $(2, \frac{1}{e^2}-1)$
$\approx -0{,}63$ $\approx -0{,}86$

$\cap$ asse x $(0,0)$ $\cap$ asse y $(0,0)$

asintoto orizzontale: $y=-1$

1) $\sqrt{x^2-4x+3} < 3-2x \iff \begin{cases} x^2-4x+3 \geq 0 \\ 3-2x \geq 0 \\ x^2-4x+3 < (3-2x)^2 \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} x \leq 1 \text{ o } x \geq 3 \\ x \leq \frac{3}{2} \\ x^2-4x+3 < 9+4x^2-12x \end{cases} \iff \begin{cases} 1^a \cap 2^a \ \boxed{x \leq 1} \\ 3x^2-8x+6>0 \end{cases} \iff$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-18}}{3}$ $\Delta<0$ nessuna sol.ne

$\forall x \in \mathbb{R}$

$\iff \begin{cases} x \leq 1 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \boxed{x \leq 1}$

Sol.ni $x \in]-\infty, 1]$

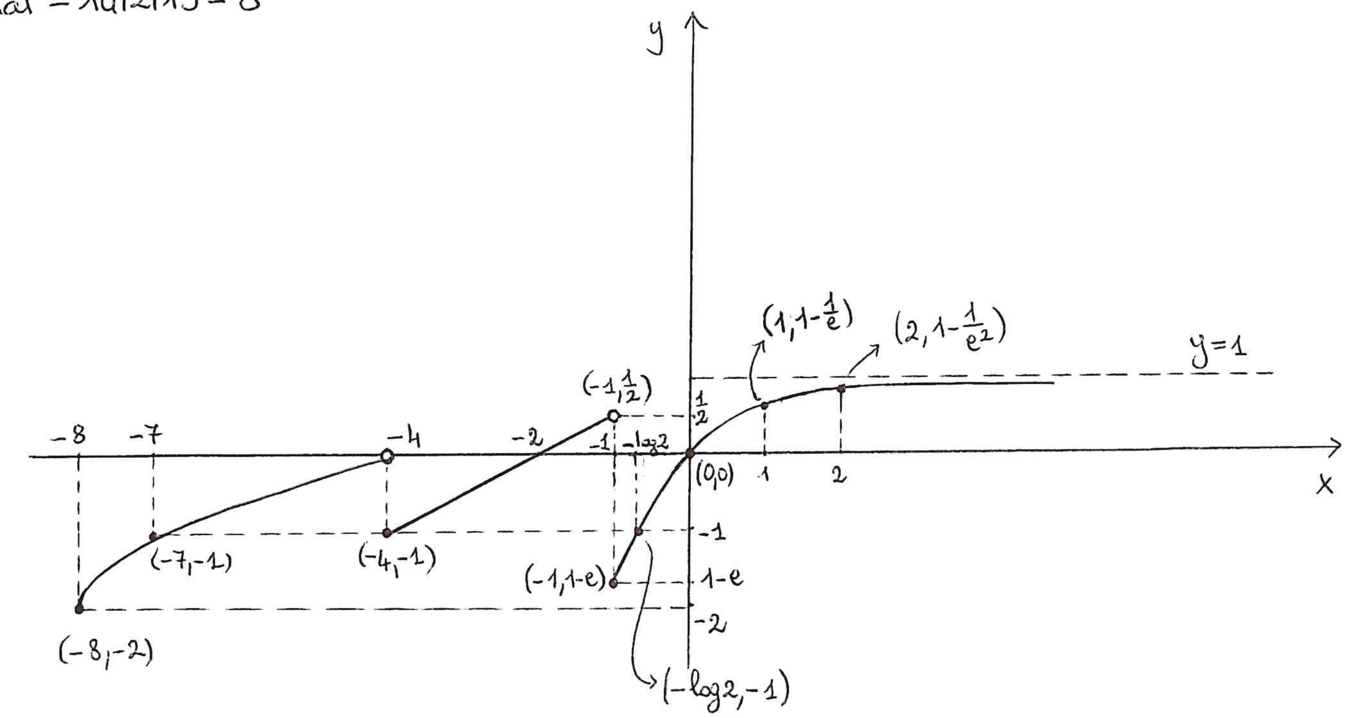
2) a) grafico di f 1° tratto già studiato nell'es. i) da considerare per $-8 \leq x < -4$

2° tratto eq.ne $y=\frac{1}{2}x+1$ si tratta di una retta di coeff. angolare $m=\frac{1}{2}$ per $(0,1)$ passa per $(-4,-1)$ e $(-1, \frac{1}{2})$. $\cap$ asse x per $\frac{1}{2}x+1=0$ $x=-2$ $(-2,0)$.

3° tratto $y=1-e^{-x}=-(e^{-x}-1)$ quindi si tratta del grafico della funzione g disegnato al punto i) simmetrizzato rispetto all'asse x

PUNTI $(-1, 1-e)$ $(0,0)$ $(1, 1-\frac{1}{e})$ $(2, 1-\frac{1}{e^2})$ asintoto $y=1$
$\approx -1{,}7$ $\approx 0{,}63$ $\approx 0{,}86$

ElMat – 14/2/19 – 8



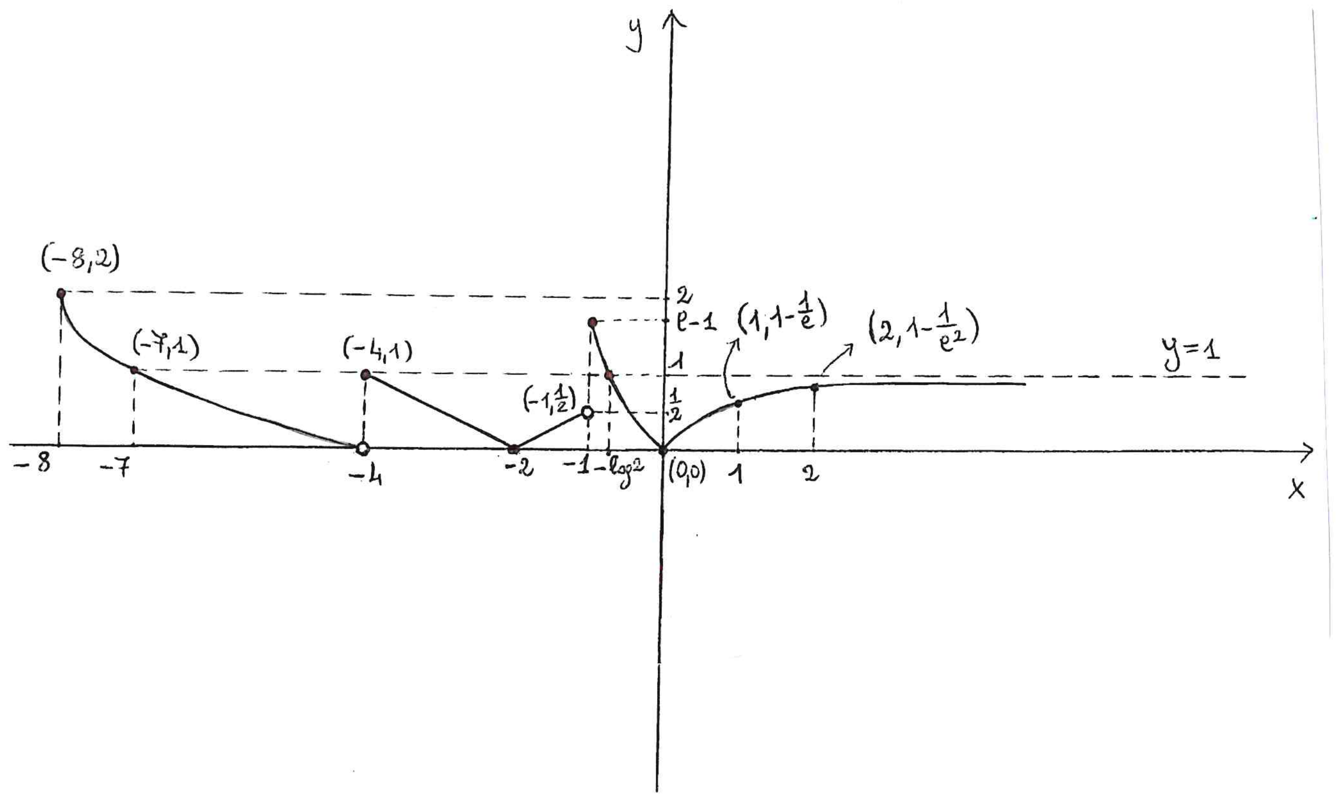
$f^{-1}(-1)$ $\quad y=-1$ se $x=-7$, $x=-4$ e $1-e^{-x}=-1$ $\quad e^{-x}=2$

$\Updownarrow$

$-x=\log 2 \Rightarrow x=-\log 2$

$\simeq -0{,}7$

b) $y=|f(x)|$

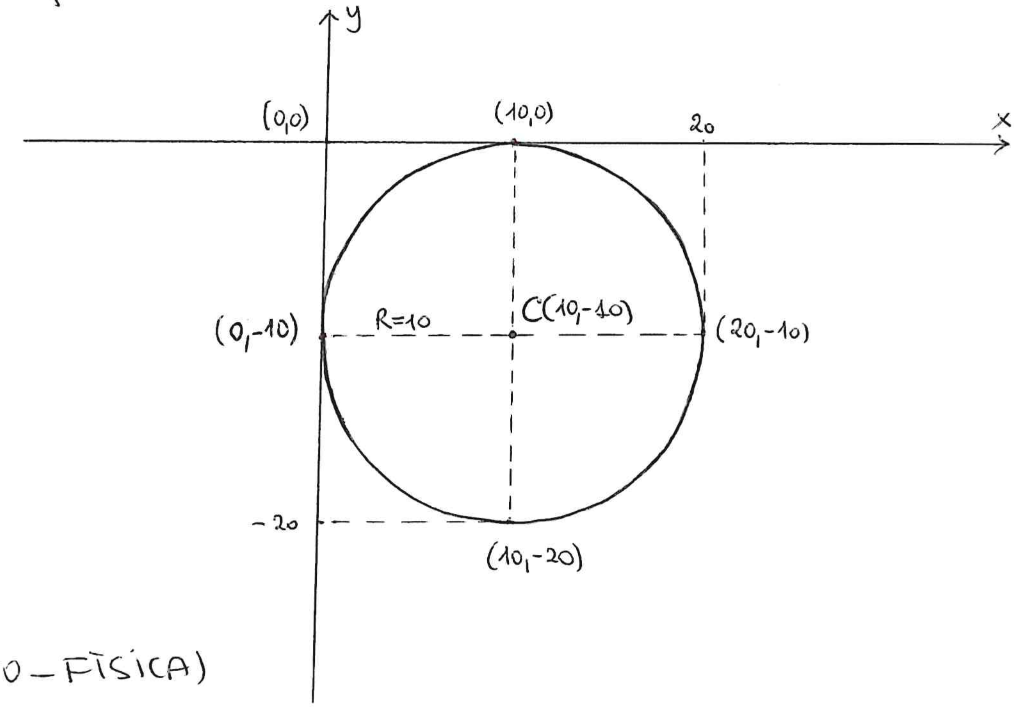


4) $x^2+y^2-20x+20y+100=0$ rappresenta una circonferenza.

Precisamente $(x-10)^2-100+(y+10)^2-\cancel{100}+\cancel{100}=0$

$$(x-10)^2+(y+10)^2=100$$

cioè la circonferenza di $C(10,-10)$ e $R=10$.



5) (FACOLTATIVO – FISICA)

$$9^x-3^x-2=0 \Leftrightarrow (3^2)^x-3^x-2=0 \Leftrightarrow 3^{2x}-3^x-2=0$$

$$\Leftrightarrow (3^x)^2-3^x-2=0$$

Poniamo $t=3^x$ ottenendo $t^2-t-2=0$

$(t+1)(t-2)=0$.

Quindi $9^x-3^x-2=0 \Leftrightarrow (3^x+1)(3^x-2)=0$

$\Leftrightarrow 3^x+1=0$ $\underline{o}$ $3^x-2=0 \Leftrightarrow 3^x=2 \Leftrightarrow$

IMPOSSIBILE

$3^x>0\ \forall x$

$\Leftrightarrow 3^x=3^{\log_3 2}$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{x=\log_3 2}$

3^x è iniettiva
passo agli esponenti