# PROPRIETÀ degli INSIEMI - Dimostrazioni

- $(A^c)^c = A$ $\quad x \in (A^c)^c \Leftrightarrow x \notin A^c \Leftrightarrow x \in A$ $\quad$ NON $(x \in A^c) \Leftrightarrow$ NON $(x \notin A)$ $\Leftrightarrow$ NON(NON $x \in A$) $\Leftrightarrow x \in A$

- $A \cap A = A$ $\quad x \in A \cap A \Leftrightarrow x \in A$ E $x \in A \Leftrightarrow x \in A$
- $A \cup A = A$ $\quad x \in A \cup A \Leftrightarrow x \in A$ O $x \in A \Leftrightarrow x \in A$

- $A \cap \phi = \phi$ $\quad$ Supponiamo per assurdo che $A \cap \phi \neq \phi \Rightarrow \exists a \in A \cap \phi$ cioè $\exists a$ : $a \in A$ E $a \in \phi$ ma è assurdo perchè l'insieme $\phi$ non contiene nessun elemento

- $A \cup \phi = A$ $\quad x \in A \cup \phi \Leftrightarrow x \in A$ O $x \in \phi \Leftrightarrow x \in A$ visto che $x \in \phi$ è sempre falsa

- $A \cap B = B \cap A$ $\quad x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ E $x \in B \Leftrightarrow x \in B$ E $x \in A$ $\Leftrightarrow x \in B \cap A$

- $A \cup B = B \cup A$ $\quad x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ O $x \in B \Leftrightarrow x \in B$ O $x \in A \Leftrightarrow x \in B \cup A$

- $A \cap B \subseteq A \cup B$ $\quad$ Tesi $\forall x \quad x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \cup B$

  $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ E $x \in B \Rightarrow x \in A$ O $x \in B \Leftrightarrow x \in A \cup B$

- $A \cap B \subseteq A$ $\quad$ Tesi $\forall x \quad x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$

  $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ E $x \in B \Rightarrow x \in A$

- $A \subseteq A \cup B$ $\quad$ Tesi $\forall x \quad x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$

  $x \in A \Rightarrow x \in A$ o $x \in B$ $\quad$ è vera

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $\quad x \in (A \cap B) \cap C \Leftrightarrow x \in A \cap B$ E $x \in C \Leftrightarrow$

  $(x \in A$ E $x \in B)$ E $x \in C \Leftrightarrow x \in A$ E $(x \in B$ E $x \in C) \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x \in A$ E $x \in B \cap C \Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C)$

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $\quad x \in (A \cup B) \cup C \Leftrightarrow x \in A \cup B$ O $x \in C \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow (x \in A$ O $x \in B)$ O $x \in C \Leftrightarrow x \in A$ O $(x \in B$ O $x \in C) \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x \in A$ o $x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A$ o $x \in B \cap C \Leftrightarrow x \in A$ o $(x \in B$ e $x \in C)$

$\Leftrightarrow$ (Propr. DISTRIB di o risp e) $(x \in A$ o $x \in B)$ e $(x \in A$ o $x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \cup B)$ e $(x \in A \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ e $x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A$ e $(x \in B$ o $x \in C)$

$\Leftrightarrow$ (Propr Distr di e risp o) $(x \in A$ e $x \in B)$ o $(x \in A$ e $x \in C) \Leftrightarrow x \in A \cap B$ o $x \in A \cap C$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $\quad x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A$ e $x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in A^c$ e $x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$

- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ $\quad x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A$ o $x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in A^c$ o $x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$.

- $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

Dimostriamo $\boxed{\Rightarrow}$ $\quad$ IP $\forall x \quad x \in A \Rightarrow x \in B \quad (A \subseteq B)$

$\boxed{\text{Tesi}}$ $A \cap B = A$ $\quad$ per def. di uguaglianza tra due insiemi $C = D \Leftrightarrow C \subseteq D$ e $D \subseteq C$

<u>1° passo</u> $A \cap B \subseteq A$ già dimostrato per tutti gli insiemi

<u>2° passo</u> $A \subseteq A \cap B$ $\quad x \in A \Rightarrow x \in A$ e $x \in B \Leftrightarrow x \in A \cap B$.

IPOTESI
Se $x \in A \Rightarrow x \in B$

Dimostriamo $\boxed{\Leftarrow}$ $\quad$ IP $A \cap B = A$

$\boxed{\text{Tesi}}$ $A \subseteq B$ cioè $\forall x \quad x \in A \Rightarrow x \in B$

$x \in A \Leftrightarrow x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ e $x \in B \Rightarrow x \in B$.

IPOTESI
$A = A \cap B$

- $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

Dimostriamo $\boxed{\Rightarrow}$ $\quad$ IP $A \subseteq B$ cioè $\forall x \quad x \in A \Rightarrow x \in B$

Tesi $A \cup B = B$

1° passo $B \subseteq A \cup B$ già dim. per qualunque insieme
vero

2° passo $A \cup B \subseteq B$ $x \in A \cup B \Leftrightarrow \underbrace{x \in A \;\underline{o}\; x \in B}$ $\Rightarrow$ $x \in B \;\underline{o}\; x \in B \Leftrightarrow x \in B$
IPOTESI
$x \in A \Rightarrow x \in B$

l'idea è che possono darsi due casi: se $x \in A \Rightarrow x \in B$ per IP
se $x \in B \Rightarrow$ ovviam $x \in B$
quindi comunque $x \in B$

Dimostriamo $\boxed{\Leftarrow}$

IP $A \cup B = B$
$\boxed{\text{Tesi}}$ $A \subseteq B$ cioè $\forall x \; x \in A \Rightarrow x \in B$

Proviamo per assurdo che $x \notin B \Rightarrow x \notin A$

$x \notin B \underset{\substack{\text{per IP} \\ B = A \cup B}}{\Leftrightarrow} x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \;\underline{e}\; x \notin B \Rightarrow x \notin A$.

⊙ $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ IP $A \subseteq B$
Tesi $\forall X$ $X \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(B)$
insieme

$X \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow X \subseteq A$ ma per IP $A \subseteq B$ $\Rightarrow X \in \mathcal{P}(B)$.
$X \subseteq A \;\underline{e}\; A \subseteq B \Rightarrow X \subseteq B$
Propr. transitiva

Dim $\boxed{\Leftarrow}$ IP $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ TESI $A \subseteq B$

Poiché $A \in \mathcal{P}(A) \underset{\text{IPOTESI}}{\Rightarrow} A \in \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow A \subseteq B$.

⊙ $A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$ Dim $\boxed{\Rightarrow}$ IP $A \subseteq B$
Tesi $A \setminus B = \emptyset$

Dim. per assurdo: NON $(A \setminus B = \emptyset) \Rightarrow$ NON $(A \subseteq B)$

NON $(A \setminus B = \emptyset) \Leftrightarrow A \setminus B \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists\, x \in A \setminus B \Leftrightarrow \exists x,\; x \in A \;\underline{e}\; x \notin B$

ma questo significa proprio che A non è contenuto in B:

infatti NON $(A \subseteq B) \Leftrightarrow \exists x : x \in A \;\underline{e}\; x \notin B$.

Dim $\boxed{\Leftarrow}$ IP $A \setminus B = \emptyset$ Tesi $A \subseteq B$

Procediamo di nuovo per assurdo NON $(A \subseteq B) \Rightarrow A \setminus B \neq \emptyset$

NON $(A \subseteq B) \Leftrightarrow \exists x : x \in A \;\underline{e}\; x \notin B \Leftrightarrow \exists x : x \in A \setminus B$
$\Leftrightarrow A \setminus B \neq \emptyset$.

- $A\setminus B = A\cap B^c$ $\quad x\in A\setminus B \iff x\in A \text{ e } x\notin B \iff$

$$x\in A \text{ e } x\in B^c \iff x\in A\cap B^c$$

- $(A\setminus B)\cap(B\setminus A)=\emptyset$ Supponiamo per assurdo che sia $\neq\emptyset$

allora $\exists x \;:\; x\in (A\setminus B)\cap(B\setminus A) \iff (x\in A\setminus B) \text{ e } (x\in B\setminus A) \iff$

$\iff (x\in A \text{ e } x\notin B) \text{ e } (x\in B \text{ e } x\notin A) \underset{\text{RIORDINANDO}}{\iff} (x\in A \text{ e } x\notin A) \text{ e } (x\in B \text{ e } x\notin B)$

entrambe le affermazioni SONO FALSE

è IMPOSSIBILE che $\exists x$.

- $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

$x\in A\setminus(B\cap C) \iff x\in A \text{ e } x\notin(B\cap C) \iff x\in A \text{ e } (x\notin B \text{ o } x\notin C)$

$\underset{\text{propr DISTR di e rispo o}}{\iff} (x\in A \text{ e } x\notin B) \text{ o } (x\in A \text{ e } x\notin C) \iff (x\in A\setminus B) \text{ o } (x\in A\setminus C)$

$\iff x\in (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

- $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$

$x\in A\setminus(B\cup C) \iff x\in A \text{ e } x\notin B\cup C \iff x\in A \text{ e } (x\notin B \text{ e } x\notin C)$

$\underset{\text{DISTRIBUISCO e su e}}{\iff} (x\in A \text{ e } x\notin B) \text{ e } (x\in A \text{ e } x\notin C) \iff (x\in A\setminus B) \text{ e } (x\in A\setminus C)$

$\iff x\in (A\setminus B)\cap(A\setminus C)$

- $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$

$x\in(A\cup B)\setminus C \iff x\in A\cup B \text{ e } x\notin C \iff (x\in A \text{ o } x\in B) \text{ e } x\notin C$

$\underset{\text{Propr DISTR di e rispo o}}{\iff} (x\in A \text{ e } x\notin C) \text{ o } (x\in B \text{ e } x\notin C) \iff x\in A\setminus C \text{ o } x\in B\setminus C$

$\iff x\in (A\setminus C)\cup(B\setminus C)$

- $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$

$x\in(A\cap B)\setminus C \iff x\in A\cap B \text{ e } x\notin C \iff (x\in A \text{ e } x\in B) \text{ e } x\notin C$

$\underset{\text{DISTRIB e su e}}{\iff} (x\in A \text{ e } x\notin C) \text{ e } (x\in B \text{ e } x\notin C) \iff (x\in A\setminus C) \text{ e } (x\in B\setminus C)$

$\iff x\in (A\setminus C)\cap(B\setminus C)$

- $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$ $\quad x\in A\setminus(B\setminus C) \iff x\in A \text{ e } x\notin B\setminus C \iff x\in A \text{ e } (x\notin B \text{ o } x\in C)$

$\underset{\text{PROPR. DISTRIB di e rispo o}}{\iff} (x\in A \text{ e } x\notin B) \text{ o } (x\in A \text{ e } x\in C) \iff (x\in A\setminus B) \text{ o } (x\in A\cap C) \iff$

$x\in(A\setminus B)\cup(A\cap C)$.