

PROPRIETÀ di INSIEMI E FUNZIONI

Ins-Fun

-1-

$$\boxed{A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c}$$

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Leftrightarrow \forall x \quad x \in A \Rightarrow x \in B \Leftrightarrow \forall x \quad x \notin B \Rightarrow x \notin A \\ &\quad \downarrow \\ &P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \text{NON } Q \Rightarrow \text{NON } P \\ &\Leftrightarrow \forall x \quad x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c \end{aligned}$$

[Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione biunivoca STRETTAMENTE CRESCENTE. Allora la funzione INVERSA
 $f^{-1}: B \rightarrow A$ è STRETTAMENTE CRESCENTE.]

Dim. IP $f \nearrow \forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

TESI $f^{-1} \nearrow \forall y_1, y_2 \in B \quad y_1 < y_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

Siano $y_1, y_2 \in B$ con $y_1 < y_2$:

$$\begin{aligned} y_1 < y_2 &\Leftrightarrow \underbrace{f \circ f^{-1}(y_1)}_{y_1 = f(f^{-1}(y_1))} < \underbrace{f \circ f^{-1}(y_2)}_{y_2 = f(f^{-1}(y_2))} \Leftrightarrow f(\underbrace{f^{-1}(y_1)}_{x_1 \in A}) < f(\underbrace{f^{-1}(y_2)}_{x_2 \in A}) \\ &\quad \text{poiché } f \circ f^{-1} = \text{id}_B \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{f(x_1) < f(x_2)}_{f \nearrow} \Leftrightarrow x_1 < x_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

Allo stesso modo si dimostra che:

[Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione biunivoca STRETTAMENTE DECRESCENTE. Allora la funzione INVERSA
 $f^{-1}: B \rightarrow A$ è STRETTAMENTE DECRESCENTE]

[1) La composizione è associativa.

$$f: A \rightarrow B \quad g: B \rightarrow C \quad h: C \rightarrow D$$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Dim. Dato $x \in A$ $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

[2) Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ sono iniettive $\Rightarrow$
 $g \circ f: A \rightarrow C$ è iniettiva.

Dim. 1° modo IP f iniettiva $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
Con la Def 2 f iniettiva $\forall x_1, x_2 \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ g iniettiva $\forall y_1, y_2 \in B \quad y_1 \neq y_2 \Rightarrow g(y_1) \neq g(y_2)$

TESI $g \circ f: A \rightarrow C$ è iniettiva cioè $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow (g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$

Siano $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \underbrace{f(x_1) \neq f(x_2)}_{\substack{\text{iniettiva} \\ y_1 \\ \in B}} \Rightarrow \underbrace{g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))}_{\substack{\text{iniettiva} \\ y_2 \\ \in B}}$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2).$$

2° modo f iniettiva $\forall x_1, x_2 \in A \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
Con la Def 3 g iniettiva $\forall y_1, y_2 \in B \quad g(y_1) = g(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$

f iniettiva se $\forall x_1, x_2 \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

TESI $g \circ f: A \rightarrow C$ iniettiva cioè $\forall x_1, x_2 \in A \quad (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Siano dunque $x_1, x_2 \in A$: $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow \underbrace{g(f(x_1))}_{y_1 \in B} = \underbrace{g(f(x_2))}_{y_2 \in B}$

$$\Rightarrow \underbrace{f(x_1) = f(x_2)}_{\text{iniettiva}} \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{iniettiva}$$

[3) Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ sono suriettive $\Rightarrow$
 $g \circ f: A \rightarrow C$ è suriettiva.

Dim. 1° modo Sia $z \in C$: dobbiamo dimostrare che $(g \circ f)$ è suriettiva cioè
che $\exists x \in A : (g \circ f)(x) = z$ - Poiché $z \in C$ e g è suriettiva $\exists y \in B$:
 $g(y) = z$; poiché $y \in B$ e f è suriettiva $\exists x \in A : f(x) = y$.

Ma allora $\exists x \in A : g(f(x)) = g(y) = z$ cioè

$(g \circ f)(x) = z$ e $(g \circ f)$ è suriettiva.

2° modo Una funzione è suriettiva se $\text{Im } f = \text{codominio}$.

IP f suriett $\Leftrightarrow \text{Im } f = B$ cioè $f(A) = B$

g suriett $\Leftrightarrow \text{Im } g = C$ cioè $g(B) = C$

Tesi $g \circ f$ è suriettiva $\Leftrightarrow \text{Im}(g \circ f) = C$ cioè $(g \circ f)(A) = C$

$$(g \circ f)(A) = g(f(A)) = g(B) = C$$

$\downarrow f_{\text{sur}} \quad \quad \quad \downarrow g_{\text{sur}}$

Di conseguenza

4) Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ sono biunivoche $\Rightarrow g \circ f$ è biunivoca

Inoltre $g \circ f$ è invertibile e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ - $(g \circ f): C \rightarrow A$

Dim. La prima affermazione segue dal fatto che $(g \circ f)$ è sia iniettiva sia suriettiva (proprietà 2) e 3)).

Per la seconda proviamo che $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \text{id}_A$ e
 $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \text{id}_C$

Utilizzando la proprietà associativa

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ (g \circ f)) = f^{-1} \circ ((g^{-1} \circ g) \circ f) = f^{-1} \circ (\text{id}_B \circ f) =$$

$g^{-1} \circ g = \text{id}_B$

$$= f^{-1} \circ f = \text{id}_A$$

$$\text{id}_B \circ f = f$$

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ (f^{-1} \circ g^{-1})) = g \circ ((f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}) = g \circ (\text{id}_B \circ g^{-1}) =$$

$f \circ f^{-1} = \text{id}_B$

$$= g \circ g^{-1} = \text{id}_C$$

$$\text{id}_B \circ g^{-1} = g^{-1}$$

Viceversa:

Ins-Fun

-4-

5) Se $g \circ f: A \rightarrow C$ è iniettiva $\Rightarrow f: A \rightarrow B$ è iniettiva.

Dim. IP $g \circ f: A \rightarrow C$ iniett. cioè $\forall x_1, x_2 \in A \quad (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Tesi f iniett. cioè $\forall x_1, x_2 \in A \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Siano dunque $x_1, x_2 \in A: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$ poiché $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

IP

$g: B \rightarrow C$ è una funzione

Si può anche DIM per assurdo.

f non iniettiva
 $\exists x_1, x_2 \in A \quad x_1 \neq x_2 \in f(x_1) = f(x_2)$
 $\exists x_1, x_2 \in A \quad x_1 \neq x_2 \in g(f(x_1)) = g(f(x_2))$
 $g \circ f$ non iniettiva

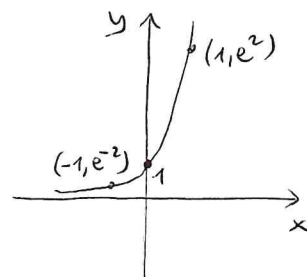
Oss. E' possibile che $g \circ f$ sia iniettiva senza che g sia iniettiva.

ES. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = e^x \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = x^2$

f è iniettiva

g non è iniettiva

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(e^x) = (e^x)^2 = e^{2x} \text{ iniettiva}$$



6) Se $g \circ f: A \rightarrow C$ è suriettiva $\Rightarrow g: B \rightarrow C$ è suriettiva.

Dim. IP $g \circ f$ è suriettiva

Tesi g è suriettiva cioè $\forall z \in C \exists y \in B: g(y) = z$.

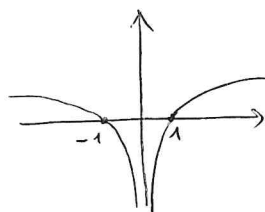
Sia $z \in C \Rightarrow \exists x \in A: (g \circ f)(x) = z \Rightarrow \exists x \in A: g(f(x)) = z$
 per ipotesi

$\Rightarrow \exists y = f(x) \in B: g(y) = z$ e g è suriettiva.

Oss. è possibile che $g \circ f$ sia suriettiva anche se f non lo è.

ES. $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad f(x) = x^2$

$g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = \log|x|$



$$(g \circ f)(x) = \log|x^2| = \log x^2$$

$$\log x^2 = \begin{cases} 2 \log x & x > 0 \\ 2 \log |x| & x < 0 \end{cases}$$

INSIEMI di LIVELLO di una funzione
SOTTOLIVELLI, SOPRALIVELLI

Sia $f: \text{dom} f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

Si dice INSIEME di LIVELLO k di f l'insieme

$$E_k = \{x \in \text{dom} f : f(x) = k\}$$

dei punti del dominio in cui f vale k .

Si dice SOTTOLIVELLO k di f l'insieme

$$\{x \in \text{dom} f : f(x) > k\}$$

e SOPRALIVELLO k di f l'insieme

$$\{x \in \text{dom} f : f(x) < k\}.$$

PROPRIETA' Siano $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ e $f: \text{dom} f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Allora

- 1) $k_1 < k_2 \Rightarrow \{x \in \text{dom} f : f(x) < k_1\} \subseteq \{x \in \text{dom} f : f(x) < k_2\}$
- 2) $k_1 < k_2 \Rightarrow \{x \in \text{dom} f : f(x) > k_2\} \subseteq \{x \in \text{dom} f : f(x) > k_1\}.$

Dim. 1) Chiamiamo $S_{k_1} = \{x \in \text{dom} f : f(x) < k_1\}$ e
 $S_{k_2} = \{x \in \text{dom} f : f(x) < k_2\}$

Dobbiamo dim. che $S_{k_1} \subseteq S_{k_2}$ sapendo che $k_1 < k_2$.

Sia $x \in S_{k_1} \Rightarrow x \in \text{dom} f \wedge f(x) < k_1 \Rightarrow x \in \text{dom} f \wedge f(x) < k_2$
IP

Proprietà
 $\Rightarrow$ transitiva $x \in \text{dom} f \wedge f(x) < k_2 \Rightarrow x \in S_{k_2}$.

Analogamente per 2).

FUNZIONE IMMAGINE TRAMITE f

Ius-Fun

-6-

Data $f: A \rightarrow B$ funzione, possiamo considerare la funzione immagine tramite f , che si indica ancora con f , e che associa ad ogni sottoinsieme di A il sottoinsieme di B costituito da tutte le immagini degli elementi di A . Quindi

$$f: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$$

$$X \subseteq A \mapsto f(X) \subseteq B \quad \text{dove } f(X) = \{f(x) : x \in X\}.$$

Si dimostra che:

- 1) Se $f: A \rightarrow B$ è iniettiva $\Rightarrow f: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$ è iniettiva.
- 2) Se $f: A \rightarrow B$ è suriettiva $\Rightarrow f: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$ è suriettiva.
- 3) Se $f: A \rightarrow B$ è biunivoca $\Rightarrow f: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$ è biunivoca.
- 4) Se $C_1 \subseteq C_2 \subseteq A \Rightarrow f(C_1) \subseteq f(C_2) \subseteq B$.
- 5) $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{P}(A) \quad f(C_1 \cup C_2) = f(C_1) \cup f(C_2)$
- 6) $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{P}(A) \quad f(C_1 \cap C_2) \subseteq f(C_1) \cap f(C_2)$ e l'inclusione può essere stretta.
- 7) $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{P}(A) \quad f(C_1 \cap C_2) = f(C_1) \cap f(C_2) \Leftrightarrow f$ è iniettiva.
- 8) $\forall C \in \mathcal{P}(A) \quad C \subseteq f^{-1}(f(C))$ e vale $\Leftrightarrow f$ è iniettiva
- 9) $\forall D \in \mathcal{P}(B) \quad f(f^{-1}(D)) \subseteq D$ e vale $\Leftrightarrow f$ è suriettiva

In 8) e 9) $f^{-1}: \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ è l'immagine inversa tramite f

che associa ad ogni sottoinsieme di B il sottoinsieme di A costituito da tutte le controimmagini degli elementi di B .

Quindi $Y \subseteq B \quad f^{-1}(Y) = \{f^{-1}(y) \text{ con } y \in Y\}.$