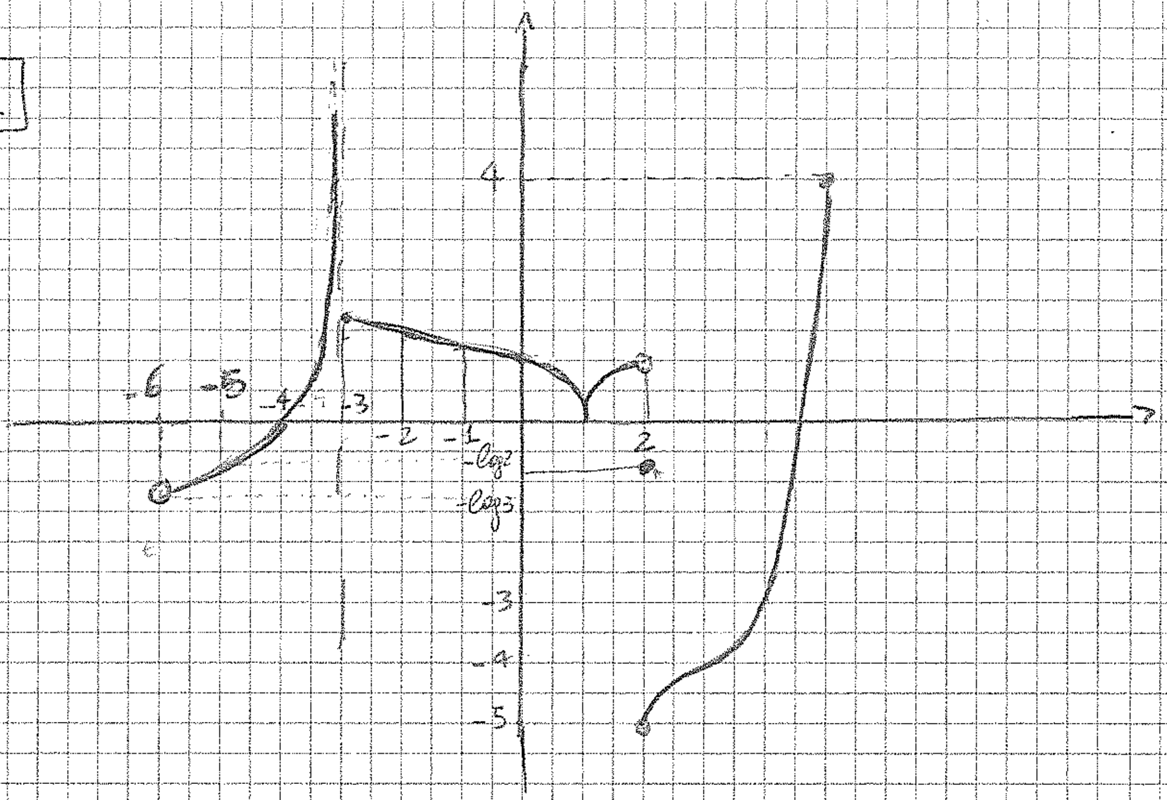
SOLUZIONI SCHEDA 3

$\boxed{1}$



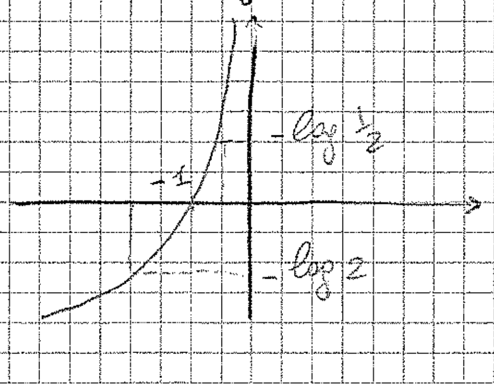
$-6 < x < -3$

$$f(x) = \log\left(\frac{1}{-x-3}\right) = \log(-x-3)^{-1} = -\log(-(x+3))$$

SI TRATTA QUINDI della funzione $y = -\log(-x)$
traslata a SINISTRA DI 3
(la funzione è ben definita in $(-6,-3)$ in quanto

$$\begin{cases} \frac{1}{-x-3} > 0 \\ -x-3 \neq 0 \end{cases} \iff x < -3$$

Il grafico di $y = -\log(-x)$ è

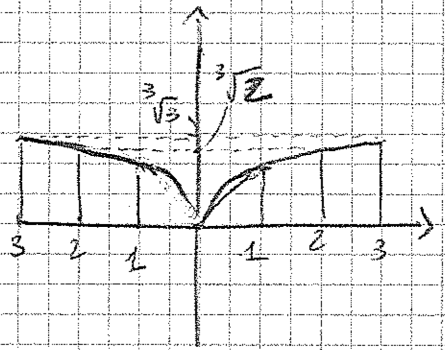


$-3 \le x < 2$

$f(x) = \sqrt[3]{|1-x|} = \sqrt[3]{|x-1|}$

Si tratta della funzione $y = \sqrt[3]{|x|}$ traslata a destra di 1

La funzione $y = \sqrt[3]{|x|} = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & x \ge 0 \\ \sqrt[3]{-x} & x < 0 \end{cases}$



$f(2) = \sin\left(-\frac{13}{3}\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2 < x \le 5$

$f(x) = (x-3)^3 - 4$

Si tratta della funzione $y = x^3$ traslata a destra di 3 e di 4 verso il basso.

$\text{dom} f = (-6, 5]$ $\quad \text{Imm} f = [-5, +\infty)$

f non ha né massimo né minimo assoluti

Max locali $\quad x = 5$

Min locali $\quad x = 1$

$$f(x)=0 \iff \begin{cases} -6<x\le -3 \\ \log\left(\frac{1}{-x-3}\right)=0 \end{cases} \vee \begin{cases} -3\le x<2 \\ \sqrt[3]{|1-x|}=0 \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} 2<x\le 5 \\ (x-3)^3-4=0 \end{cases} \qquad \left(x=2 \Rightarrow f(x)\neq 0 \right)$$

$$\iff \begin{cases} -6<x<-3 \\ \frac{1}{-x-3}=1 \end{cases} \vee \begin{cases} -3\le x<2 \\ |1-x|=0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2<x\le 5 \\ (x-3)=\sqrt[3]{4} \end{cases}$$

uso che $y=\sqrt[3]{x}$ è biettiva

$$\iff \begin{cases} -6<x<-3 \\ x=-4 \end{cases} \vee \begin{cases} -3\le x<2 \\ x=1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2< x\le 5 \\ x=3+\sqrt[3]{4} \end{cases}$$

OSS che $\sqrt[3]{4}<\sqrt[3]{8}=2$ quindi $3+\sqrt[3]{4}\in]2,5]$

Da cui ho

$$f(x)=0 \iff x\in\left\{-4,\ 1,\ 3+\sqrt[3]{4}\right\}$$

Analogo procedimento per $f(x)>1$, ovvero

$$f(x)>1 \iff \overset{①}{\begin{cases} -6<x<-3 \\ \log\left(-(x+3)^{-1}\right)>1 \end{cases}} \vee \overset{②}{\begin{cases} -3\le x<2 \\ \sqrt[3]{|1-x|}>1 \end{cases}}$$

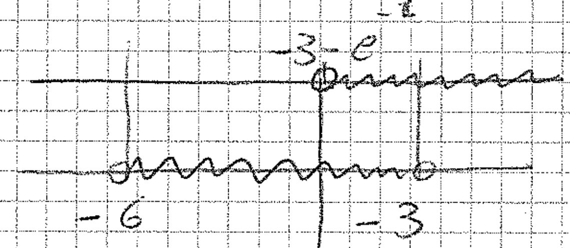
$$\vee \overset{③}{\begin{cases} 2<x\le 5 \\ (x-3)^3-4>1 \end{cases}}$$

Risolviamo separatamente i 3 sistemi

① $\begin{cases} -\log\left(-(x+3)\right) > 1 \\ -6 < x < -3 \end{cases} \iff \begin{cases} \log\left(-(x+3)\right) < -1 \\ -6 < x < -3 \end{cases}$

$\log x$ è crescente $\iff$ $\begin{cases} -(x+3) < e^{-1} \\ -6 < x < -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -3 - e^{-1} \\ -6 < x < -3 \end{cases}$

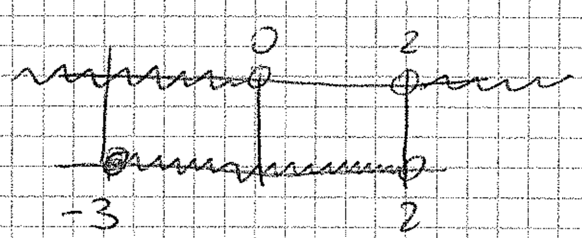
OSS $0 < e^{-1} < 1$



Soluzione ① $x \in \left(-3 - e^{-1}, -3\right)$

② $\begin{cases} \sqrt[3]{|1-x|} > 1 = \sqrt[3]{1} \\ -3 \le x < 2 \end{cases} \iff \begin{cases} |1-x| > 1 \\ -3 \le x < 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x < 0 \vee x > 2 \\ -3 \le x < 2 \end{cases}$

$y = \sqrt[3]{}$ è crescente

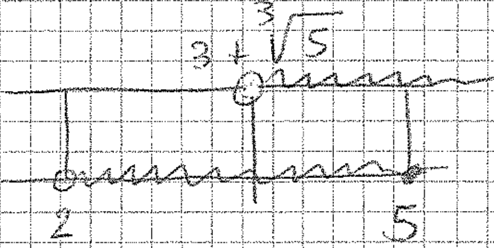


Soluzione ② $x \in [-3, 0)$

$$③ \begin{cases} (x-3)^3 - 4 > 1 \\ 2 < x \leq 5 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-3)^3 > 5 \\ 2 < x \leq 5 \end{cases} \iff$$

$\{\, y = x^3$ è CRESCENTE

$$\begin{cases} x - 3 > \sqrt[3]{5} \\ 2 < x \leq 5 \end{cases}$$



OSS $\sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{8} = 2$

Soluzione ③ $\quad x \in \left(3 + \sqrt[3]{5}, \ 5\right]$

UNENDO LE SOLUZIONI SI OTTIENE

$$f(x) > 1 \iff x \in \left(-3 - e^{-1}, 0\right) \cup \left(3 + \sqrt[3]{5}, 5\right]$$

- LA PROPOSIZIONE

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \in \operatorname{dom} f \Rightarrow f(x) > -2$$

È FALSA, negandola si ha

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad x \in \operatorname{dom} f \wedge f(x) \leq -2$$

per esempio $\quad x = -4 \in \operatorname{dom} f$ e

$$f(-4) = -3$$

- LA PROPOSIZIONE

$$\forall x \in \operatorname{dom} f \quad |x| > 1 \ \vee \ |f(x)| < 2$$

È VERA

(NEG. $\quad \exists x \in \operatorname{dom} f \quad |x| \leq 1 \wedge |f(x)| \geq 2$)

[2] $A = \{ x \in \mathbb{R} \text{ tc } |x^3 - 5x^2 + 5x - 2| > 2 \}$

$$|x^3 - 5x^2 + 5x - 2| > 2 \iff \overset{(1)}{x^3 - 5x^2 + 5x - 2 > 2}$$

$$\vee \underset{(2)}{x^3 - 5x^2 + 5x - 2 < -2}$$

(1)

$p(x) = x^3 - 5x^2 + 5x - 4 > 0$

SE CI SONO RADICI RAZIONALI SONO NELL'INSIEME $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

$p(1) = -3$

$p(-1) = -15$

$p(2) = -6$

$p(-2) = -42$

$p(4) = 0$

4 zero di $p(x)$ ⇝ RUFFINI

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -5 & 5 & -4 \\ 4 & & 4 & -4 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

Allora $p(x) = (x-4)(x^2 - x + 1)$

$p(x) \geq 0$ ⇝ $x - 4 \geq 0 \iff x \geq 4$

$x^2 - x + 1 \geq 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}$

$\Delta = 1 - 4 < 0$

	4	
$-$		$+$
$+$		$+$
$-$		$+$

Allora $p(x) > 0 \iff x > 4$ ← Soluzione di (1)

(2)

$q(x) = x^3 - 5x^2 + 5x < 0 \iff$

$\iff x(x^2 - 5x + 5) < 0$

$x \geq 0$

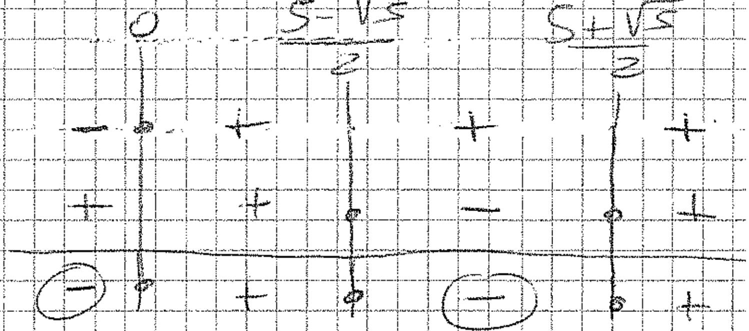
$x^2 - 5x + 5 \geq 0 \iff x \leq \frac{5-\sqrt{5}}{2} \vee x \geq \frac{5+\sqrt{5}}{2}$

$\Delta = 25 - 20$; SOLUZ EQ ASSOCIATA $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$

$q(x) < 0 \iff$

$x < 0 \vee x \in \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2} \right)$

soluzione (2)



COMPLESSIVAMENTE (OSS $\frac{5+\sqrt{5}}{2} < \frac{5+\sqrt{9}}{2} = 4$

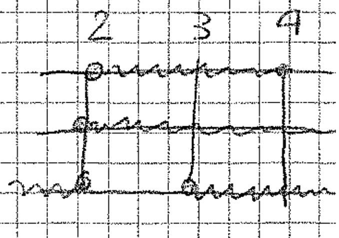
$A = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2} \right) \cup (4, +\infty)$

$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \quad \sqrt{(4-x)(x-2)} \leq x - 2 \right\}$

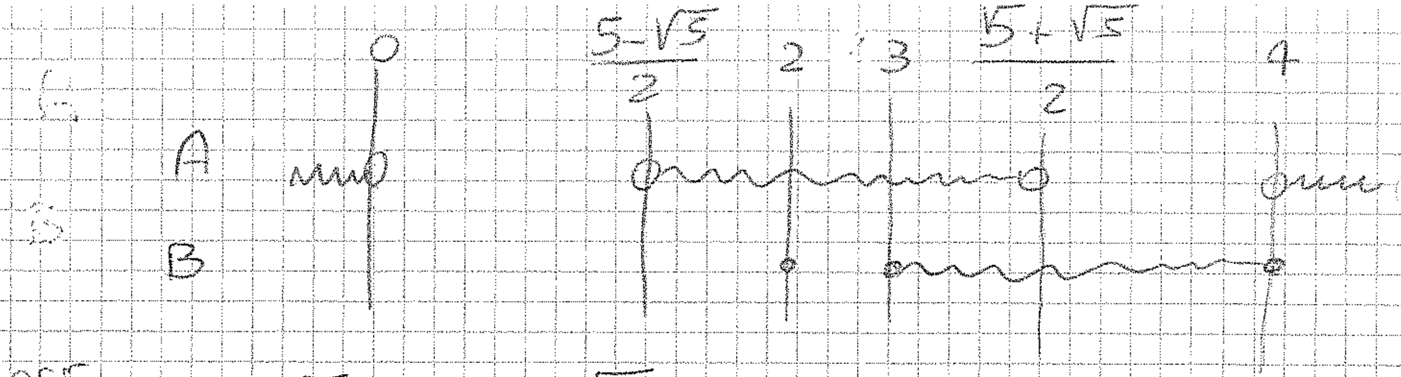
$$\sqrt{(4-x)(x-2)} \leq (x-2) \iff \begin{cases} (4-x)(x-2) \geq 0 \\ (x-2) \geq 0 \\ (4-x)(x-2) \leq (x-2)^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x-4)(x-2) \leq 0 \\ x \geq 2 \\ -x^2 + 6x - 8 \leq x^2 - 4x + 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ x \geq 2 \\ 2x^2 - 10x + 12 \geq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ x \geq 2 \\ 2(x-3)(x-2) \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ x \geq 2 \\ x \leq 2 \vee x \geq 3 \end{cases}$$



$\iff x = 2 \vee 3 \leq x \leq 4$



<u>OSS</u>

$$0 < \frac{5-\sqrt{5}}{2} < \frac{5-\sqrt{1}}{2} = 2$$

$$\frac{5+\sqrt{5}}{2} > \frac{5+\sqrt{1}}{2} = 3$$

$$A \cap B = \{2\} \cup \left[3, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$A \cup B = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$$

$$A \setminus B = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, 2\right) \cup (2, 3) \cup (4, +\infty)$$

- LA PROPOSIZIONE

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \in B \Rightarrow |x-2| < 2$ E' FALSA

NEG: $\exists x \in \mathbb{R} : x \in B$ e $|x-2| \geq 2$

Prendo $x = 4 \in B \quad |4-2| = 2$

- LA PROPOSIZIONE

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \geq 0 \vee x \in A$ E' VERA

(NEG: $\exists x \in \mathbb{R} \quad x < 0 \wedge x \notin A$)

$\boxed{3}$

$\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$; $\sin\left(-\frac{8}{3}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

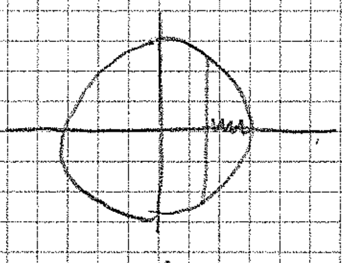
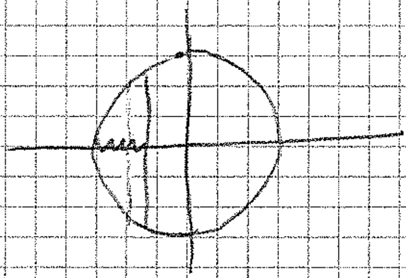
$\cos\left(\frac{5}{2}\pi\right) = 0$; $\cos\left(-\frac{16}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

$tg\left(\frac{7}{4}\pi\right) = -1$; $tan\left(-\frac{12}{3}\pi\right) = 0$

- SOLUZIONI IN $[0, 2\pi]$ DI

$$\cos^2(t) - \frac{1}{4} > 0 \iff \left(\cos(t) - \frac{1}{2}\right)\left(\cos t + \frac{1}{2}\right) > 0$$

$$\iff \cos(t) > \frac{1}{2} \lor \cos(t) < -\frac{1}{2}$$

$$\iff t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}\pi, 2\pi\right] \lor t \in \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right)$$

- SOLUZIONI IN $[0, 2\pi]$ DI

$\cos^2(x) + 1 > \frac{5}{2}\cos(x)$ PONGO $t = \cos(x)$

$$\iff$$

$$t^2 - \frac{5}{2}t + 1 > 0 \iff 2t^2 - 5t + 2 > 0$$

SOLUZ EQ ASSOCIATA $t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

Allora $t^2 - \frac{5}{2}t + 1 > 0 \iff t < \frac{1}{2} \lor t > 2$

$\iff \cos(x) < \frac{1}{2} \iff x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi\right)$

$\vee$

$\cos(x) > 2 \to$ NO SOLUZIONI

$\boxed{4}$

- L'EQUAZIONE DELLA GENERICA PARABOLA CON VERTICE IN $(-3,-1)$ È $y = a(x+3)^2 - 1$

IMPONENDO IL PASSAGGIO PER $P: (1,7)$ SI HA

$$7 = a(1+3)^2 - 1 \iff 8 = a \cdot 16 \iff$$

$$a = \frac{1}{2}$$

LA PARABOLA È $y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 1$

- L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA SAREBBE

$$y^2 + (x-2)^2 = 9 \qquad \left(\begin{array}{c}\text{Centro}: (2,0) \\ R = 3\end{array}\right)$$

DA CUI L'EQUAZIONE

$$y = + \sqrt{9-(x-2)^2}$$

$\uparrow$

PRENDO + PERCHÈ LA FUNZIONE È POSITIVA.