

SOLUZIONI SCHEDA 4

1. TROVARE LE SOLUZIONI IN $[0, 2\pi)$ di:

1. $2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = 0$ PONGO $t = \sin(x)$

$$2t^2 - t - 1 = 0 \quad (\Rightarrow) \quad t_2 = \frac{1 + \sqrt{9}}{4} < \frac{3}{2}$$
$$\Delta = 1 + 8 > 0 \quad -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(x) = 1 \quad (\Rightarrow) \quad x = \frac{\pi}{2}$$

$$\vee \sin(x) = -\frac{1}{2} \quad (\Rightarrow) \quad x = \frac{5}{6}\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi$$

2. $3\sin^2(x) - \cos^2(x) = 0 \quad (\Rightarrow)$

$$(\Rightarrow) 3\sin^2(x) - 1 + \sin^2(x) = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) 4\sin^2(x) = 1 \quad (\Rightarrow) \quad \sin(x) = \frac{1}{2}$$
$$\vee \sin(x) = -\frac{1}{2}$$

$$(\Rightarrow) x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi \vee x = \frac{11}{6}\pi$$

3. $\sqrt{3}\cos^2(x) + \cos(x)\sin(x) = 0 \quad (\Rightarrow)$

$$\cos(x) \left(\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) \right) = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$\cos(x) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2}$$

$$\vee \sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{divido per } \cos(x) \\ (\Rightarrow) \quad \tan(x) = -\sqrt{3} \end{array}$$

$$(\Rightarrow) x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{posso supporre} \\ \cos(x) \neq 0 \end{array} \right.$$

Soluzioni $x \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{3}\pi \right\}$

4. $2 \sin^2(x) - 3 \cos(x) < 0 \Leftrightarrow$

$2(1 - \cos^2(x)) - 3 \cos(x) < 0 \Leftrightarrow$

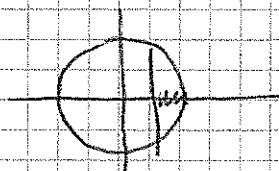
$2 \cos^2(x) + 3 \cos(x) - 2 > 0 \quad t = \cos(x)$

$2t^2 + 3t - 2 > 0 \Leftrightarrow$

$\Delta = 9 + 16$ RADICI EQ ASSOCIATA $t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} < \begin{matrix} -2 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}$

$\Leftrightarrow t < -2 \vee t > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(x) < -2 \vee \cos(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in [0, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{5}{3}\pi, 2\pi]$
 $\uparrow$ NO SOLUZIONI $\uparrow$



5. $(\cos(x) + 4) - \frac{3}{\cos(x) + 2} > 0$

OSS

$\cos(x) + 2 > 0 \quad \forall x$

$\uparrow$
 POSSO MOLTIPLICARE
 TUTTO PER $(\cos(x) + 2)$
 SENZA CHE CAMBI LA
 DISUGUAGLIANZA

$\Leftrightarrow (\cos(x) + 4)(\cos(x) + 2) - 3 > 0 \Leftrightarrow$

$\cos^2(x) + 6 \cos(x) + 5 > 0$

$t = \cos(x) \leadsto t^2 + 6t + 5 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (t + 5)(t + 1) > 0 \Leftrightarrow t < -5 \vee t > -1$

$t < -5 \Leftrightarrow \cos(x) < -5$ NO SOLUZIONI

$t > -1 \Leftrightarrow \cos(x) > -1 \Leftrightarrow \cos(x) \neq -1$

Soluzioni $x \in [0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$

2 - CONOSCENDO IL VALORE DEI SEMI-ASSI E SAPENDO CHE IL CENTRO E' DEL TIPO $C(x_c, 1)$

SI HA

$$\frac{(x-x_c)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

IMPONENDO IL PASSAGGIO PER $P(2, 3)$ SI TROVA

$$\frac{(2-x_c)^2}{2} + 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{(2-x_c)^2}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_c = 2$$

ALLORA L'EQUAZIONE DELL'ELLSSE DIVENTA

$$\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

- LA FORMA GENERALE PER L'IPERBOLE CHE CERCHIAMO E'

$$(I) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{oppure} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad (II)$$

$$\text{con } \frac{b}{a} = 2 \Leftrightarrow b = 2a,$$

SAPENDO CHE L'IPERBOLE INTERSECA L'ASSE DELLE ASCISSE ALLORA SAPPIAMO DI TROVARCI NEL CASO (I)

OWERO

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4a^2} = 1$$

IMPONENDO IL PASSAGGIO PER $P_1(3,0)$ SI HA

$$\frac{9}{a^2} = 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad a^2 = 9 \quad (a > 0) \quad (\Leftrightarrow) \quad a = 3$$

DA CUI L'EQUAZIONE DELL'IPERBOLE

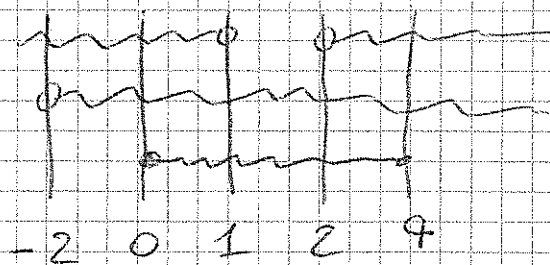
$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$$

$$\boxed{3} \quad A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \log(x^2 - 3x + 2) \leq \log(x + 2) \right\}$$

PER DETERMINARE A IMPOSTO IL SISTEMA

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 > 0 \\ x + 2 > 0 \\ x^2 - 3x + 2 \leq x + 2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{CE } \log \\ \text{USO crescente} \\ \text{del logaritmo} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x-2)(x-1) > 0 \\ x > -2 \\ x^2 - 4x \leq 0 \\ x(x-4) \end{array} \right. \quad (\Leftrightarrow) \quad \left\{ \begin{array}{l} x \leq 1 \vee x \geq 2 \\ x > -2 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{array} \right.$$



Allora

$$A = [0, 1) \cup (2, 4]$$

LA PROPOSIZIONE

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 0 \Rightarrow x \in A \quad \text{E' FALSA}$$

$$\text{NEG: } \exists x \in \mathbb{R} \quad x > 0 \wedge x \notin A$$

per esempio $x = 5$

- LA PROPOSIZIONE

$$\forall x \in A \quad (x-1)^2 > 0 \quad \text{E' VERA}$$

$$\text{NEG: } \exists x \in A : (x-1)^2 \leq 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{questo accade se e} \\ \text{solo } x=1 \notin A \end{array} \right)$$

- LA PROPOSIZIONE

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left| x - \frac{7}{2} \right| < \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \Rightarrow x \in A \quad \text{VERA}$$

$$\text{infatti: } \left| x - \frac{7}{2} \right| < \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{7}{2} < \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ x - \frac{7}{2} > -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > \frac{10}{3} \end{cases} \quad \text{e } \left[\frac{10}{3}, 4 \right) \subset A$$

$$\text{NEG: } \exists x \in \mathbb{R} : \left| x - \frac{7}{2} \right| < \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \wedge x \notin A$$

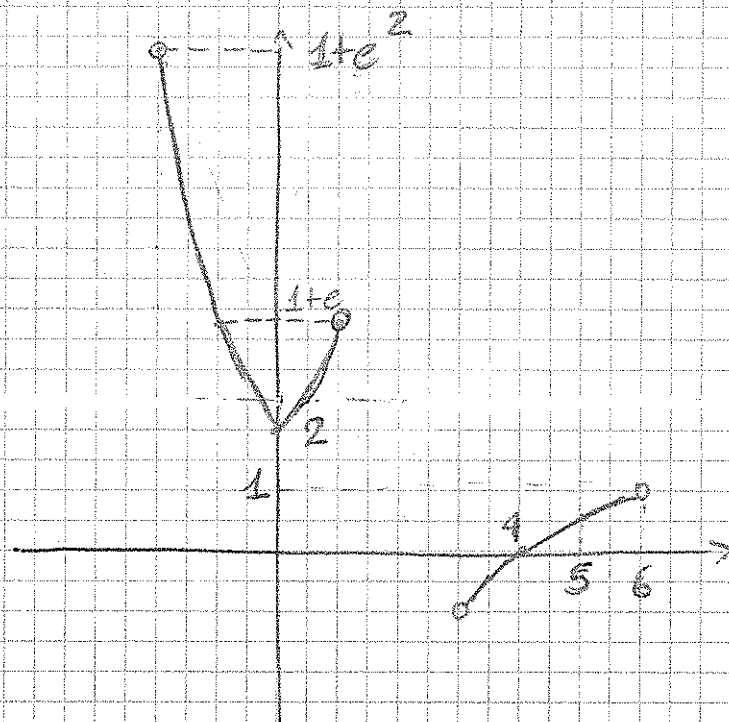
- LA PROPOSIZIONE

$$\forall x \in A \quad \log(1+x) > 0 \quad \text{E' FALSA}$$

$$\text{NEG: } \exists x \in A : \log(x) \leq 0$$

per (unico) esempio $x = 0$

4



$$-2 < x < 1$$

$f(x) = e^{|x|} + 1$, è la funzione $y = e^{|x|} = \begin{cases} e^x & x > 0 \\ e^{-x} & x < 0 \end{cases}$
traslato in alto di 1

$$3 < x < 6$$

$f(x) = \log_2(x-2) - 1$, è la funzione $y = \log_2(x)$
traslato a destra di 2 e in
oss il dominio di $\log_2(x-2) - 1$ è $(2, +\infty)$ | basso
di 1