Esercitazione 1 – Soluzione

1. Riordinare i seguenti valori in ordine crescente, senza fare uso dei numeri decimali:

$$\left\{\frac{7}{\sqrt{5}}, 3, \cos\left(\frac{11\pi}{3}\right), 5-3\sqrt{10}, \sqrt{2}-1\right\}$$

Soluzione

Osserviamo innanzitutto che

$$\cos\left(\frac{11\pi}{3}\right) = \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Dopodiché valutiamo

$$5 - 3\sqrt{10} < 5 - 3\sqrt{9} = -4.$$

Quest'ultimo è l'unico valore negativo ed è dunque il minore senza bisogno di ulteriori confronti. A questo punto, notiamo che $\sqrt{2}-1$ è compreso tra 0 e 1: infatti vale $\sqrt{1}-1 < \sqrt{2}-1 < 2-1$. Impostiamo quindi il confronto con l'unico altro valore compreso tra 0 e 1, cioè $1/2$. Ci chiediamo quindi se la differenza tra i due valori sia positiva, impostando

$$\sqrt{2} - 1 - \frac{1}{2} > 0.$$

Isoliamo la radice ottenendo $\sqrt{2} > 3/2$. Elevando al quadrato si trova $2 > 9/4$, ossia $8 > 9$ che è falso. Perciò $\sqrt{2} - 1$ risulta minore di $1/2$.

Ora notiamo che $7/\sqrt{5}$ è compreso tra 2 e 4. Infatti, $\frac{7}{\sqrt{9}} < \frac{7}{\sqrt{5}} < \frac{7}{\sqrt{4}}$. Impostiamo il confronto con 3, unico altro valore compreso tra 2 e 4:

$$\frac{7}{\sqrt{5}} - 3 > 0.$$

Isolando la radice si ottiene $\frac{7}{3} > \sqrt{5}$. Elevando al quadrato, si trova $\frac{49}{9} > 5$, ossia $49 > 45$ che è vero. Perciò $7/\sqrt{5}$ è maggiore di 3. In conclusione, la soluzione è

$$5 - 3\sqrt{10} < \sqrt{2} - 1 < \cos\left(\frac{11\pi}{3}\right) < 3 < \frac{7}{\sqrt{5}}.$$

---

2. Dati i due insiemi $A = \left[-4, \sqrt{2}-1\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{7}{\sqrt{5}}\right]$ e $B = \left(-\infty, -\frac{7}{\sqrt{5}}\right] \cup [0, 3)$, determinare $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, effettuando tutti i confronti necessari senza uso dei numeri decimali.

Soluzione

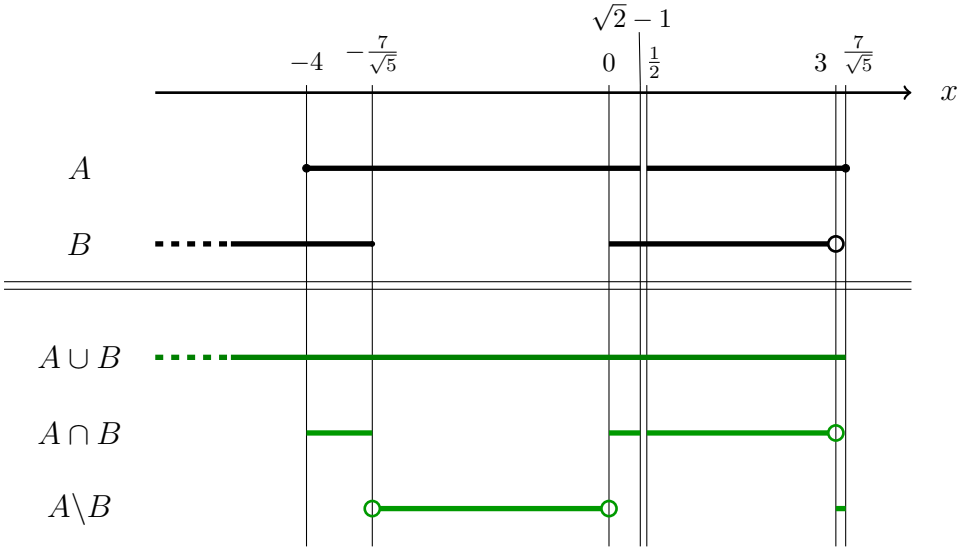
Dai risultati dell'esercizio 1, sappiamo innanzitutto che

$$-4 < 0 < \sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2} < 3 < \frac{7}{\sqrt{5}}.$$

Da ciò ricaviamo inoltre che $-7/\sqrt{5} < -3$, perciò rimane da impostare il confronto tra $-7/\sqrt{5}$ e -4, chiedendoci quando la differenza tra questi due valori sia positiva:

$$-\frac{7}{\sqrt{5}} - (-4) > 0. \tag{1}$$

Moltiplicando per $\sqrt{5}$ e isolando il termine con la radice quadrata, troviamo $-7 > -4\sqrt{5}$. Invertendo il segno di disuguaglianza con un cambio di segno e dividendo per 4 si ha $\frac{7}{4} < \sqrt{5}$. Elevando al quadrato, quest'ultima espressione diventa $\frac{49}{16} < 5$, ossia $49 < 80$ che è vera. Di conseguenza la disequazione (1) è vera, e $-7/\sqrt{5} > -4$. Rappresentiamo gli insiemi trovati



Gli insiemi richiesti sono dunque:

$$A \cup B = \left(-\infty, \frac{7}{\sqrt{5}}\right]$$

$$A \cap B = \left[-4, -\frac{7}{\sqrt{5}}\right] \cup [0, \sqrt{2} - 1] \cup \left[\frac{1}{2}, 3\right)$$

$$A \backslash B = \left(-\frac{7}{\sqrt{5}}, 0\right) \cup \left[3, \frac{7}{\sqrt{5}}\right]$$

---

3. Semplificare

$$e^{3\log 2 + 2\log 3} + 2^{\log e^3} \log \frac{1}{e^8} = \dots$$

Soluzione

Ricordando che, per le proprietà di esponenziali e logaritmi, vale $a \log b = \log b^a$ per $b > 0$, possiamo fare una prima semplificazione

$$e^{\log 8 + \log 9} + 2^{\log e^3} \log e^{-8}.$$

Ora, ricordando che $e^{x+y} = e^x e^y$ si ottiene

$$e^{\log 8} e^{\log 9} + 2^{\log e^3} \log e^{-8}.$$

Utilizzando $e^{\log x} = x$, valida $\forall x > 0$, e $\log e^x = x$, valida $\forall\, x$, l'espressione diventa

$$\begin{aligned} &8 \cdot 9 + 2^3 \cdot (-8) = \\ &= 8 \cdot 9 - 8 \cdot 8 = \\ &= 8. \end{aligned}$$

---

4. $-2x^2 + x + 3 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ldots$

Soluzione

Consideriamo la parabola associata alla disequazione, $y = -2x^2 + x + 3$. Calcoliamo il Δ:

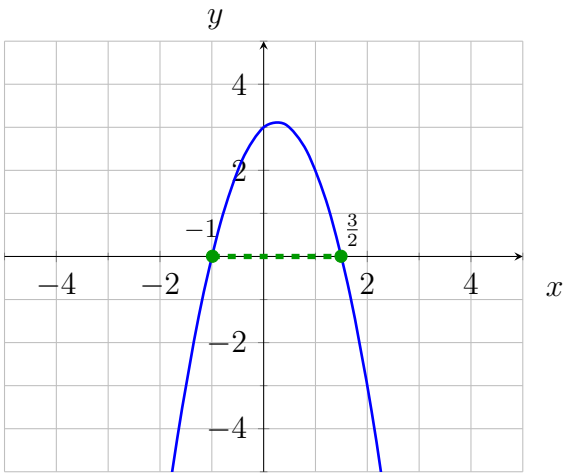
$$\Delta = 1 - 4 \cdot (-2) \cdot 3 = 1 + 24 = 25$$

La parabola tocca l'asse x nei due punti

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{25}}{4} = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{25}}{4} = -1.$$

Essendo la concavità rivolta verso il basso, in quanto il coefficiente del termine x^2 è negativo, concludiamo che la disequazione è soddisfatta per

$$-1 \leq x \leq \frac{3}{2}.$$



5. Completare

(a) $2^{5x+1} = 8^x \iff \dots$

(b) $5x^2 + 2x + 1 > 0 \iff \dots$

(c) $|x| = 1 - \sqrt{2} \iff \dots$

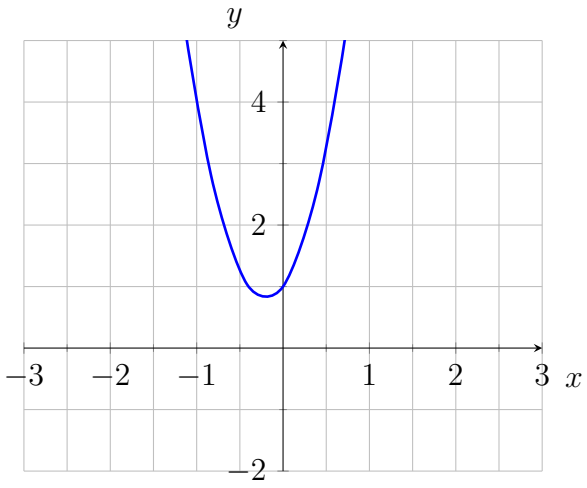
(d) $x + \sqrt{x} = 6 \iff \dots$

(e) $|x| < \sqrt{x} \iff \dots$

Soluzione

(a) Scrivendo $8 = 2^3$ l'equazione diventa $2^{5x+1} = 2^{3x}$. Essendo la funzione $f(x) = 2^x$ iniettiva, dall'uguaglianza tra le funzioni segue l'uguaglianza tra gli esponenti. Si ottiene $5x + 1 = 3x$, la cui soluzione è $x = -1/2$.

(b) Considerando la parabola associata, $y = 5x^2 + 2x + 1$, calcoliamo il delta: $\Delta = (2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 4 - 20 = -16 < 0$. Essendo il $\Delta < 0$, la parabola non tocca mai l'asse x. Essendo il coefficiente del termine x^2 positivo, la concavità è rivolta verso l'alto. Di conseguenza, la parabola sta sempre sopra l'asse x, perciò l'equazione è soddisfatta per tutti gli $x \in \mathbb{R}$.



(c) Osserviamo immediatamente che $1 - \sqrt{2} < 1 - \sqrt{1} = 0$, perciò la quantità a destra dell'uguale è negativa. Dunque $\nexists\, x \in \mathbb{R} : |x| = 1 - \sqrt{2}$.

(d) Affinché l'equazione possa essere scritta, devono essere soddisfatte le condizioni di esistenza della radice quadrata, ossia $x \geq 0$. Per risolvere, isoliamo la radice quadrata e impostiamo il sistema:

$$\sqrt{x} = 6 - x \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ 6 - x \geq 0 \\ x = (6-x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ 6 - x \geq 0 \\ x = (6-x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 6 \\ x = 36 - 12x + x^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0 \leq x \leq 6 \\ x^2 - 13x + 36 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Per risolvere l'equazione quadratica calcoliamo il Δ: $\Delta = (13)^2 - 4 \cdot 36 = 169 - 144 = 25$. Le due soluzioni dell'equazione sono quindi

$$x_1 = \frac{13 + \sqrt{25}}{2} = 9, \qquad x_2 = \frac{13 - \sqrt{25}}{2} = 4.$$

Inserendo nel sistema (2), otteniamo che l'unica soluzione è $x = 4$ (in quanto $9 \notin [0, 6]$).

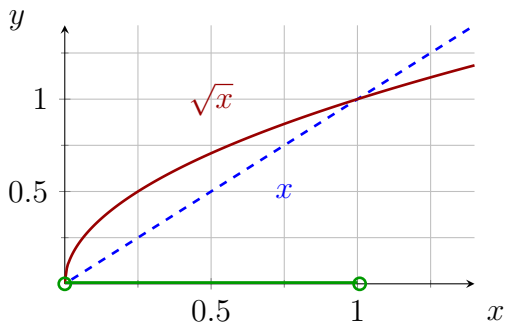
(e) Affinché la disequazione possa essere scritta, devono essere soddisfatte le condizioni di esistenza della radice quadrata, ossia deve valere $x \geq 0$. Questo ci permette di rimuovere il valore assoluto, e la disequazione diventa $x < \sqrt{x}$. Elevando al quadrato si ha

$$\sqrt{x} > x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x > x^2$$

e portando tutti i termini a sinistra si trova

$$x^2 - x < 0. \tag{3}$$

Studiamo l'equazione associata $x^2 - x = 0$. Possiamo fattorizzare come $x(x-1) = 0$ e, per la legge di annullamento del prodotto, l'equazione è soddisfatta per $x = 0$ o $x = 1$. Avendo la parabola $y = x^2 - x$ concavità rivolta verso l'alto, otteniamo che la disequazione (3) è soddisfatta per $0 < x < 1$.



---

6. Risolvere

$$\frac{x - 1 - \sqrt{x^2 - 4}}{|x - 2| + 3} \leq 0.$$

Soluzione

Discutiamo innanzitutto il campo di esistenza. Il denominatore è sempre positivo perché $|x - 2| > -3$ è sempre vera. Per quanto riguarda il numeratore, l'argomento della radice quadrata deve essere non-negativo, $x^2 \geq 4$, ossia $x \leq -2$ o $x \geq 2$. Dato che il denominatore è sempre positivo, il numeratore determina il segna della frazione, quindi la disequazione è verificata se e solo se

$$x - 1 - \sqrt{x^2 - 4} \leq 0.$$

Isolando la radice quadrata, si ha

$$\sqrt{x^2 - 4} \geq x - 1.$$

Perciò

$$\sqrt{x^2-4} \geq x-1 \iff \begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ x-1<0 \end{cases} \quad \underline{\text{o}} \quad \begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ x^2-4 \geq (x-1)^2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x \leq -2 \ \underline{\text{o}} \ x \geq 2 \\ x<1 \end{cases} \quad \underline{\text{o}} \quad \begin{cases} x \leq -2 \ \underline{\text{o}} \ x \geq 2 \\ x \geq 1 \\ x^2-4 \geq x^2-2x+1 \end{cases}$$

$$\iff x \leq -2 \ \underline{\text{o}} \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x \geq 5 \end{cases} \iff x \leq -2 \ \underline{\text{o}} \ x \geq \frac{5}{2}.$$

In conclusione, la soluzione è

$$x \leq -2 \quad \text{o} \quad x \geq \frac{5}{2}.$$

---

7. Considerare la seguente uguaglianza: $\log(2x+1)^4 = 4\log(2x+1)$. È vero o falso che vale per ogni x reale? Spiegare.

Soluzione

È falso. Prima di tutto va determinato il campo di esistenza, discutendo gli argomenti dei logaritmi. A sinistra, l'argomento è elevato alla quarta potenza, perciò valori sia positivi che negativi dell'argomento sono ammessi, ma non nulli. Dunque deve valere $2x+1 \neq 0$, ossia $x \neq -1/2$. Per quanto riguarda l'argomento a destra, invece, esso deve essere strettamente positivo, $2x+1>0$, cioè $x>-1/2$. Ora possiamo sfruttare le proprietà dei logaritmi per riscrivere l'equazione come

$$\log(2x+1)^4 = \log(2x+1)^4.$$

L'equazione è quindi soddisfatta per $x>-1/2$, cioè le due espressioni coincidono solo dove entrambe hanno senso.