Tutorato – Soluzione esercitazione 2

1. Sia data la funzione
$$f(x) = \frac{\log^2 x - \log x}{\log \sqrt{x-1}}.$$

   (a) Determinare il dominio.

   (b) Cercare gli zeri della funzione.

Soluzione

(a) Innanzitutto, vanno imposte le condizioni di esistenza della radice e dei logaritmi, ossia che argomento sia non negativo per la radice e positivo per i logaritmi. Dopodiché, bisogna imporre che il denominatore sia diverso da zero affinché la frazione abbia senso. Queste condizioni producono il sistema:
$$\begin{cases} x > 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ \sqrt{x-1} > 0 \\ \log \sqrt{x-1} \neq 0 \end{cases}$$
Osserviamo che vale $\sqrt{x-1} > 0 \iff x - 1 > 0 \iff x > 1$. Intersecando le prime tre condizioni e osservando che il logaritmo vale zero quando il suo argomento vale 1, otteniamo
$$\begin{cases} x > 1 \\ \sqrt{x-1} \neq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$
Il dominio di $f(x)$ è dunque
$$(1,2) \cup (2,+\infty)$$

(b) Avendo determinato il dominio, per trovare gli zeri della funzione cerchiamo gli zeri del numeratore. Perciò imponiamo
$$\log^2 x - \log x = 0 \quad \iff \quad \log x(\log x - 1) = 0.$$
Per la legge di annullamento del prodotto deve quindi valere
$$\log x = 0 \quad \underline{\text{o}} \quad \log x - 1 = 0. \quad \iff \quad \log x = 0 \quad \underline{\text{o}} \quad \log x = 1 \quad \iff \quad x = 1 \quad \underline{\text{o}} \quad x = e.$$
Notando che $x = 1$ non appartiene al dominio della funzione, l'unico zero di $f(x)$ è $x = e$, essendo $e > 2$.

---

2. Stabilire se sono vere o false le seguenti affermazioni:

   (a) le soluzioni della disequazione $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} < \frac{16}{9}$ sono $x < -1$;

(b) le soluzioni della disequazione $\left(\frac{5}{6}\right)^{2x} < 0$ sono $x < 0$;

(c) $\nexists\, x \in \mathbb{R} : 5^x < -5$;

Soluzione

(a) Notiamo che $\frac{16}{9}$ può essere riscritto come $\frac{4^2}{3^2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$. Possiamo quindi riscrivere la disequazione come

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} < \frac{16}{9} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} < \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$$

Essendo $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ una funzione decrescente poiché la base $\frac{3}{4}$ è un numero minore di 1, risulta

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x_1} < \left(\frac{3}{4}\right)^{x_2} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 > x_2.$$

Nel nostro caso otteniamo

$$x - 1 > -2 \quad \Longleftrightarrow \quad x > -1.$$

Di conseguenza l'affermazione è falsa.

(b) Se $a > 0$, a^x è sempre positivo per ogni $x \in \mathbb{R}$, perciò l'affermazione è falsa.

(c) Per lo stesso ragionamento del punto precedente, l'affermazione è vera.

---

3. Si consideri la circonferenza di equazione $(x-1)^2 + y^2 - 7 = 0$. Determinare

(a) il centro e il raggio della circonferenza;

(b) se il punto $(0,-\sqrt{6})$ appartiene alla circonferenza;

(c) l'equazione della retta tangente alla circonferenza in $(1-\sqrt{7},0)$;

(d) l'equazione della retta tangente alla circonferenza in $(1,\sqrt{7})$.

Disegnare con precisione la circonferenza e le due rette.

Soluzione

(a) Ricordando che l'equazione $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$ rappresenta una circonferenza di raggio R centrata nel punto (x_c, y_c), il centro della circonferenza è (1,0) e il raggio è $\sqrt{7}$.

(b) Per verificare se il punto appartiene alla circonferenza, inseriamone le coordinate nell'equazione e verifichiamo se questa è soddisfatta:

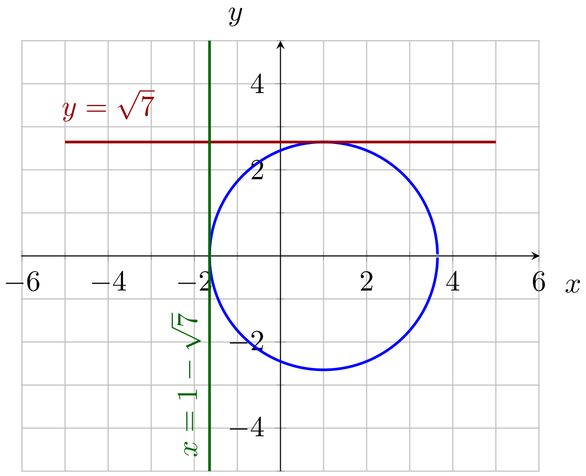
$$(0-1)^2 + (-\sqrt{6})^2 - 7 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 + 6 - 7 = 0.$$

L'equazione è soddisfatta quindi il punto appartiene alla circonferenza.

(c) Il punto $(1-\sqrt{7}, 0)$ è un punto alla stessa altezza y del centro la cui coordinata x è spostata di $\sqrt{7}$, ovvero del valore di un raggio, verso sinistra rispetto al centro. Si tratta perciò dell'estremo sinistro della circonferenza. La retta tangente è una retta verticale passante per tale ascissa, la cui equazione è quindi $x = 1 - \sqrt{7}$.

(d) Il punto $(1, \sqrt{7})$ è un punto con la stessa coordinata x del centro la cui coordinata y è spostata di $\sqrt{7}$, ovvero del valore di un raggio, verso l'alto rispetto al centro. Si tratta perciò del punto più in alto della circonferenza. La retta tangente è una retta orizzontale passante per tale ordinata, la cui equazione è quindi $y = \sqrt{7}$.

(e) Mettendo assieme le informazioni trovate nei punti precedenti, possiamo disegnare la circonferenza e le due rette:



4. L'insieme di equazione $x^2 + 4x + 2y^2 - 4y - 10 = 0$ rappresenta ...
avente le seguenti caratteristiche: ...
Disegnare con precisione l'insieme trovato.

Soluzione

Semplifichiamo l'equazione raccogliendo un fattore 2 dai termini in y,

$$x^2 + 4x + 2(y^2 - 2y) - 10 = 0$$

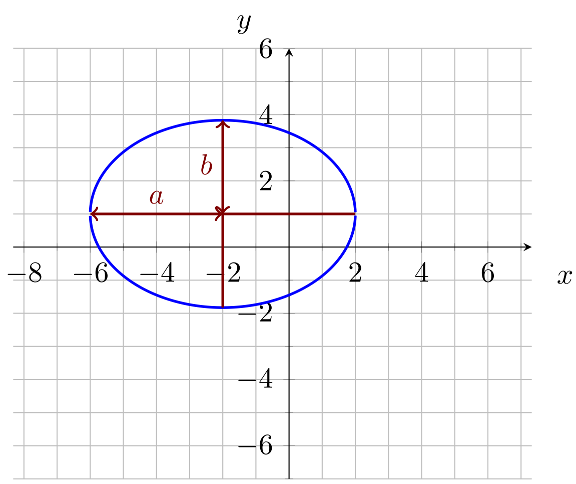
Completiamo ora i quadrati in x e y:

$$x^2 + 4x + 4 - 4 + 2(y^2 - 2y + 1 - 1) - 10 = 0 \iff (x+2)^2 - 4 + 2[(y-1)^2 - 1] - 10 = 0.$$
$$\iff (x+2)^2 - 4 + 2(y-1)^2 - 2 - 10 = 0 \iff (x+2)^2 + 2(y-1)^2 = 16$$
$$\iff \frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{8} = 1.$$

Riconosciamo quindi l'equazione di un'ellisse, essendo del tipo

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2} + \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1.$$

Le caratteristiche sono le seguenti: il centro è $(-2, 1)$, mentre il semiasse minore è $b = 2\sqrt{2}$ e il semiasse maggiore è $a = 4$. Con queste informazioni possiamo disegnare l'insieme trovato.



5. Date le rette di equazione $x + 2y + 4 = 0$ e $x + y + 3 = 0$, si determini:
   (a) il punto A di intersezione delle due rette;
   (b) l'equazione dell'iperbole equilatera passante per il punto A;
   (c) l'equazione della parabola con vertice in A, e passante per (0,0);

   Disegnare sul piano tutte le curve sopracitate.

Soluzione

(a) Per trovare il punto di intersezione, mettiamo a sistema le equazioni delle due rette:

$$\begin{cases} x + 2y + 4 = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases} \quad \overset{\text{sottraendo eq. sotto da eq. sopra}}{\iff} \quad \begin{cases} y + 1 = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \quad \begin{cases} y = -1 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} y = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Dunque il punto di intersezione è $A = (-2, -1)$.

(b) L'equazione di un'iperbole equilatera è $x^2 - y^2 = k$. Poiché il punto A sta sopra alla bisettrice del primo e terzo quadrante e sotto a quella del secondo e quarto quadrante, k deve essere positivo (altrimenti i rami dell'iperbole sarebbero sempre sopra alle bisettrici nel primo e secondo quadrante, e sempre sotto nel terzo e quarto quadrante). Inserendo le coordinate del punto A nell'equazione otteniamo l'equazione per k:

$$(-2)^2 - (-1)^2 = k \quad \iff \quad k = 3$$

L'equazione dell'iperbole cercata è quindi $x^2 - y^2 = 3$.

(c) Una parabola noto il vertice ha equazione $y = a(x - x_V)^2 + y_V$, perciò una parabola con vertice in $A = (-2, -1)$ ha equazione

$$y = a(x + 2)^2 - 1.$$

Imponendo il passaggio per $(0, 0)$ si trova $0 = 4a - 1 \quad \iff \quad a = \frac{1}{4}$. L'equazione della parabola cercata è dunque

$$y = \frac{1}{4}(x + 2)^2 - 1 = \frac{x^2}{4} + x.$$

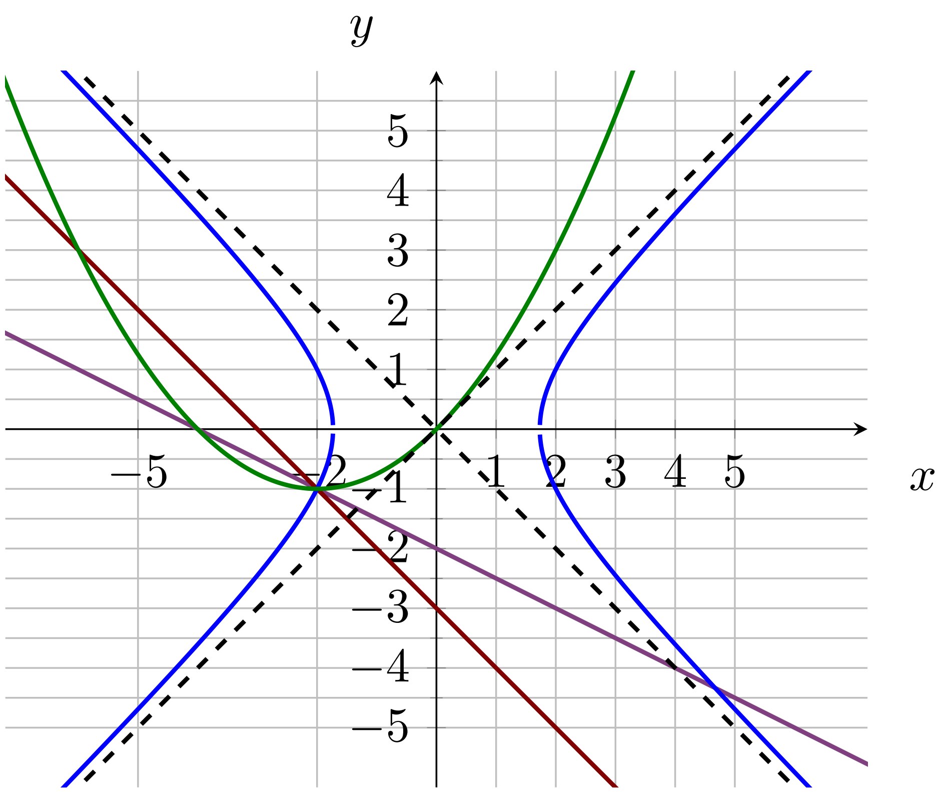
L'equazione della parabola cercata è dunque $y = x^2/4 + x$.

(d) Per disegnare le curve, determiniamone le ulteriori caratteristiche utili:

Rette: è conveniente cercare i due punti di intersezione con gli assi (o uno solo e usare il punto di intersezione A). Questo va fatto inserendo $x = 0$ e $y = 0$ separamente nelle rispettive equazioni e risolvendo per la rimanente coordinata. Per la retta $x+2y+4 = 0$ troviamo i punti $(-4, 0)$ e $(0, -2)$. Per la retta $x + y + 3 = 0$ troviamo $(0, -3)$ e $(-3, 0)$.

Iperbole: Essendo l'iperbole equilatera, gli asintoti hanno equazione determinata da $y = \pm x$. Inserendo $y = 0$ nell'equazione, troviamo che la curva tocca l'asse x in $x = \pm\sqrt{3}$.

Parabola: Essendo il coefficiente di x^2 positivo, la concavità è rivolta verso l'alto. Sappiamo che il vertice ha ascissa -2 e che la parabola tocca l'asse x in $x = 0$. Senza ulteriori calcoli sappiamo quindi che l'altro punto di intersezione è a $x = -4$, per simmetria della parabola.



---

6. Data la funzione $f(x) = \log_2(|x - a| + 1)$,
   (a) determinare a in modo che la funzione abbia dominio $\mathbb{R}$ e il suo grafico passi per (0;1) e (4;2);
   (b) trovare i punti di intersezione con gli assi cartesiani;
   (c) disegnare nel piano il grafico della funzione $f(x)$;

Soluzione

(a) Il dominio della funzione è determinato dalla condizione che l'argomento del logaritmo sia positivo, ossia $|x-a|+1 > 0 \iff |x-a| > -1$. Poiché il valore assoluto è sempre non negativo, la disequazione è soddisfatta per ogni x e a in $\mathbb{R}$, ossia il dominio è $x \in \mathbb{R}$ per qualsiasi valore di a. Imponiamo ora che il grafico di $f(x)$ passi per $(0,1)$ e $(4,2)$, inserendo questi valori nell'equazione $y = \log_2(|x-a|+1)$.

$$\begin{cases} 1 = \log_2(|-a|+1) \\ 2 = \log_2(|4-a|+1) \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = \log_2(|-a|+1) \\ 2 = \log_2(|4-a|+1) \end{cases}$$

Usiamo che $1 = \log_2 2$ e $2 = \log_2 4$. Ricordando inoltre che la funzione $\log_2 x$ è iniettiva e dunque vale che, per $x > 0$ e $y > 0$, $\log_2 x = \log_2 y \iff x = y$, si ottiene

$$\begin{cases} 2 = |a|+1 \\ 4 = |4-a|+1 \end{cases} \iff \begin{cases} |a| = 1 \\ |4-a| = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 1 \quad \underline{\text{o}} \quad a = -1 \\ a = 7 \quad \underline{\text{o}} \quad a = 1 \end{cases} \iff a = 1.$$

Le condizioni richieste sono dunque soddisfatte solo se $a = 1$. Otteniamo quindi la funzione

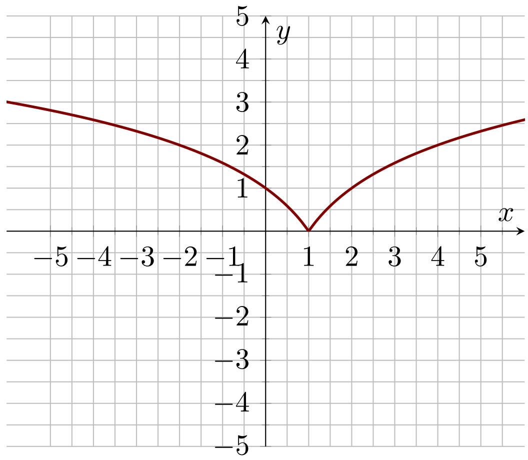
$$f(x) = \log_2(|x-1|+1).$$

(b) Sappiamo che il grafico di f passa per $(0,1)$, perciò sappiamo già che questo è il punto di intersezione con l'asse y. Per trovare il punto di intersezione con l'asse x risolviamo $f(x)=0$:

$$\log_2(|x-1|+1)=0 \iff |x-1|+1=1 \iff |x-1|=0 \iff x=1.$$

(c) Per costruire il grafico di $f(x)=\log_2(|x-1|+1)$ osserviamo innanzitutto che, se $x\geq 1$, è possibile rimuovere il valore assoluto e la funzione diventa semplicemente $\log_2 x$. Perciò per $x\geq 1$ il grafico di $f(x)$ è quello di $\log_2(x)$.

Per $x<1$, nel togliere il valore assoluto l'argomento va cambiato di segno, e la funzione diventa $\log_2(2-x)$. Per capire come è fatto il grafico di questa funzione, osserviamo che $\log_2(-x)$, per $x<0$, corrisponde ad una riflessione del grafico di $\log_2(x)$ rispetto all'asse y. La presenza di un addendo $+2$ nell'argomento, $\log_2(2-x)$, produce poi uno spostamento dell'intero grafico di 2 verso gli x positivi. Sappiamo dai punti precedenti che la funzione tocca l'asse y in $(0,1)$, e siamo dunque pronti a disegnare il grafico



---

7. Siano date l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ e la parabola di equazione $y=\frac{3}{4}x^2-2$.

(a) Disegnare le due curve.

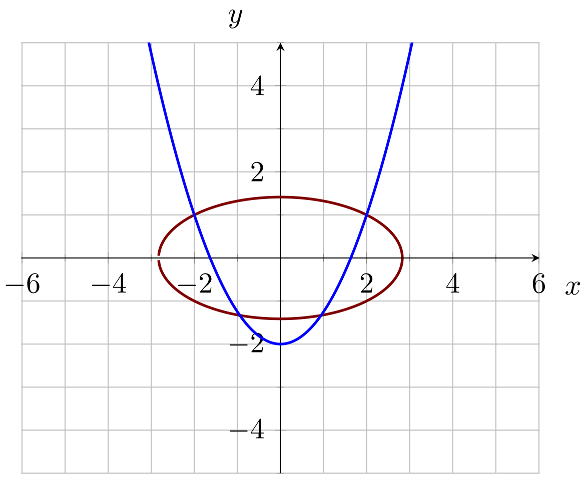
(b) Trovare i punti di intersezione tra le due curve.

Soluzione

(a) Per disegnare le due curve determiniamo le caratteristiche principali:

Ellisse: L'ellisse ha centro (0,0) e semiassi $a=2\sqrt{2}$ e $b=\sqrt{2}$. Essendo centrata in $(0,0)$ (o inserendo $x=0$ e $y=0$ nell'equazione) troviamo che l'ellisse interseca gli assi nei punti $(\pm a,0)$ e $(0,\pm b)$.

Parabola: La parabola ha concavità rivolta verso l'alto, essendo il coefficiente del termine x^2 positivo, e tocca gli assi nei punti $(0,-2)$, $(\pm\sqrt{\frac{8}{3}},0)$. Il vertice ha coordinate $(0,-2)$.



(b) Per trovare i punti di intersezione, mettiamo a sistema le due equazioni e risolviamo:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1 \\ y=\frac{3}{4}x^2-2 \end{cases} \xRightarrow{\text{Sostituendo } y \text{ nella prima equazione}} \begin{cases} \frac{x^2}{8}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x^2-2\right)^2=1 \\ y=\frac{3}{4}x^2-2 \end{cases}$$

Sviluppando il quadrato nella prima equazione otteniamo

$$\frac{x^2}{8}+\frac{1}{2}\left(\frac{9}{16}x^4-3x^2+4\right)=1 \iff \frac{x^2}{8}+\frac{9}{32}x^4-\frac{3}{2}x^2+2=1$$

$$\iff \frac{9}{32}x^4-\frac{11}{8}x^2+1=0.$$

Questa è un'equazione biquadratica. Per risolverla, si pone $x^2=t$ e poi si calcola il Δ:

$$\Delta=\left(\frac{11}{8}\right)^2-4\cdot\frac{9}{32}=\frac{121}{64}-\frac{9}{8}=\frac{121-72}{64}=\frac{49}{64}.$$

Perciò le soluzioni per t sono

$$t_1=\frac{\frac{11}{8}+\frac{7}{8}}{\frac{9}{16}}=\frac{18}{8}\cdot\frac{16}{9}=4. \qquad \underline{\text{o}} \qquad t_2=\frac{\frac{11}{8}-\frac{7}{8}}{\frac{9}{16}}=\frac{4}{8}\cdot\frac{16}{9}=\frac{8}{9},$$

da cui $x^2=4$ $\underline{\text{o}}$ $x^2=\frac{8}{9}$. Risolvendo infine per x troviamo le ascisse dei quattro punti di intersezione:

$$x_1=-2 \qquad \underline{\text{o}} \qquad x_2=2 \qquad \underline{\text{o}} \qquad x_3=-\frac{2\sqrt{2}}{3} \qquad \underline{\text{o}} \qquad x_4=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Inserendo questi valori nell'equazione della parabola (o ugualmente dell'ellisse), troviamo le corrispondenti ordinate:

$$y_1=1, \quad y_2=1, \quad y_3=-\frac{4}{3}, \quad y_4=-\frac{4}{3}.$$

I quattro punti di intersezione sono quindi

$$(-2,1) \quad (2,1), \quad \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3},-\frac{4}{3}\right), \quad \left(\frac{2\sqrt{2}}{3},-\frac{4}{3}\right).$$