Tutorato – Soluzione esercitazione 4

1. Dividere il polinomio $P(x)$ per il polinomio $D(x)$ nei seguenti casi:
   (a) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6; \quad D(x) = x - 3.$
   (b) $P(x) = x^3 + 5x^2 - 4x - 20; \quad D(x) = x^2 - 4.$
   (c) $P(x) = x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 40x + 25; \quad D(x) = x^2 + 10x + 25.$

Soluzione

(a)
$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 2x^2 - 5x + 6 & x - 3 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 - 3x^2 } & x^2 + x - 2 \\
x^2 - 5x + 6 & \\
\underline{x^2 - 3x } & \\
-2x + 6 & \\
\underline{-2x + 6} & \\
0 &
\end{array}
$$

(b)
$$
\begin{array}{r|l}
x^3 + 5x^2 - 4x - 20 & x^2 - 4 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 + 0x^2 - 4x } & x + 5 \\
5x^2 + 0x - 20 & \\
\underline{5x^2 + 0x - 20} & \\
0 &
\end{array}
$$

(c)
$$
\begin{array}{r|l}
x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 40x + 25 & x^2 + 10x + 25 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4 + 10x^3 + 25x^2 } & x^2 - 2x + 1 \\
-2x^3 - 19x^2 - 40x + 25 & \\
\underline{-2x^3 - 20x^2 - 50x + 0} & \\
x^2 + 10x + 25 & \\
\underline{x^2 + 10x + 25} & \\
0 &
\end{array}
$$

---

2. Sia dato il polinomio $P(x) = x^3 - 3x - 2$. Dire se sono corrette le seguenti affermazioni:
   (a) il polinomio $P(x)$ è divisibile per $(x - 2)$.
   (b) le uniche radici reali di $P(x)$ sono 1 e -1.
   (c) la disequazione $P(x) > 0$ ha soluzione $x > 2$.

Soluzione

(a) x_0 si dice radice o zero di un polinomio se $P(x_0) = 0$. Poi si dimostra che x_0 radice di un polinomio se e solo se $P(x)$ divisibile per $(x - x_0)$. Quindi per verificare se $P(x)$ divisibile per $(x-2)$ si deve semplicemente calcolare $P(2)$ e controllare se 0. Essendo in questo caso verificato, concludiamo che l'affermazione è vera.

(b) Dal punto (a) sappiamo che 2 è radice di $P(x)$, perciò l'affermazione è falsa.

(c) Dal punto (a) vediamo che $P(x)$ può essere fattorizzato come

$$P(x) = (x-2)(x+1)^2.$$

Il fattore $(x+1)^2$ è positivo per ogni $x \neq -1$, mentre $x-2$ è positivo se $x > 2$. Facendo lo specchietto per la disequazione prodotto troviamo la soluzione $x > 2$, quindi l'affermazione è vera.

		-1		2	
$x-2$	$+$		$+$	0	$+$
$(x+1)^2$	$-$	0	$-$		$+$
$(x-2)(x+1)^2$	$-$	0	$-$	0	$+$

---

3. Risolvere $(x^2 - 4x + 3)(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \leq 0$.

Soluzione

Riconosciamo nel fattore di destra il cubo pefetto $(x-1)^3$. Usando la regola di somma e prodotto, scomponiamo il primo fattore come $(x-3)(x-1)$. La disequazione dunque diventa

$$(x-3)(x-1)^4 \leq 0.$$

Facendo lo specchietto per la disequazione, troviamo la soluzione $x \leq 3$.

		1		3	
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$(x-1)^4$	$+$	0	$+$		$+$
$(x-3)(x-1)^4$	$-$	0	$-$	0	$+$

---

4. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

(a) $f(x) = 3 - e^{x-2}$

(b) $f(x) = \log(x^2) - 1$

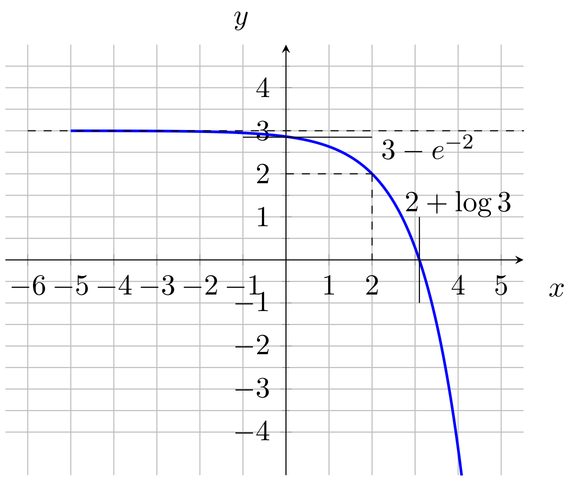
(c) $f(x) = \sqrt{x-2} - 1$

(d) $f(x) = -|x^2 - 4x|$

(e) $f(x) = 1 - \cos|x|$, per $x \in [0, 2\pi]$

Soluzione

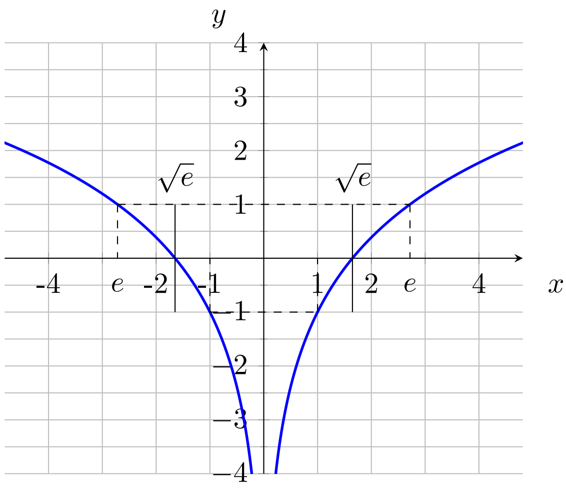
(a) Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$ e il grafico ha equazione $y = 3 - e^{x-2}$. Partiamo dal grafico $y = e^x$ dell'esponenziale, che ricordiamo tocca l'asse y in $(0, 1)$ e ha un asintoto $y = 0$ per x negativi. Lo spostamento di -2 nell'esponente, $y = e^{x-2}$, produce uno spostamento di tutto il grafico di 2 verso gli x positivi. Moltiplicare per -1, ottenendo $y = -e^{x-2}$, produce una riflessione del grafico rispetto all'asse x. Infine, l'aggiunta di un addendo 3, che ci porta al grafico della funzione studiata $y = 3 - e^{x-2}$, sposta il grafico di 3 verso l'alto. La funzione studiata ha quindi un asintoto $y = 3$ per x negativi, tocca l'asse y in $f(0) = 3 - e^{-2} \approx 2,86$, l'asse x in $2 + \log 3 \approx 3,1$ (risolvendo $f(x) = 0$).



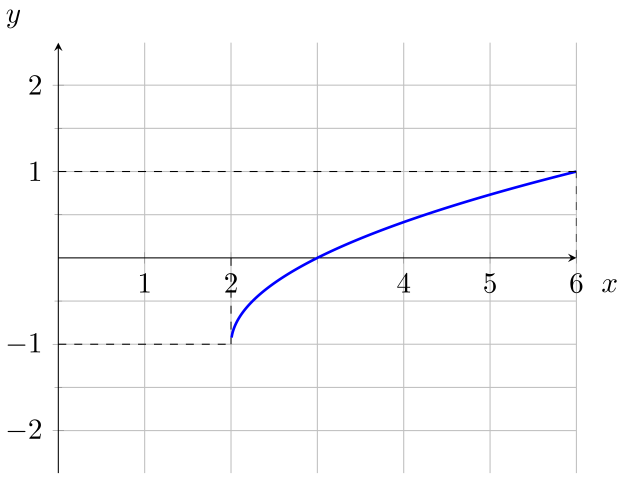
(b) L'argomento del logaritmo è sempre positivo, perciò la condizione di esistenza è $x^2 > 0$ e il dominio della funzione è $\mathbb{R} - \{0\}$. L'equazione del grafico è $y = \log(x^2) - 1$. Notiamo che, se x è positivo, possiamo fare la semplificazione $\log x^2 = 2 \log x$. Dopodichè l'addendo -1, che dà il grafico della funzione complessiva $y = f(x)$, produce uno spostamento del grafico verso il basso di 1. Dunque per x positivi il grafico di $f(x)$ è uguale al grafico di $\log x$ con le ordinate moltiplicate per 2 e spostato poi verso il basso di 1. Inserendo x negativi nella funzione, osserviamo che, per via del elevamento al quadrato nell'argomento del logaritmo, si ottengono gli stessi valori del corrispondente x positivo, che è $-x$. Perciò per x negativi vale $\log x^2 = 2 \log(-x)$. Questo può essere compreso in alternativa notando che

$$\log x^2 = \log(|x|^2) = 2 \log |x|$$

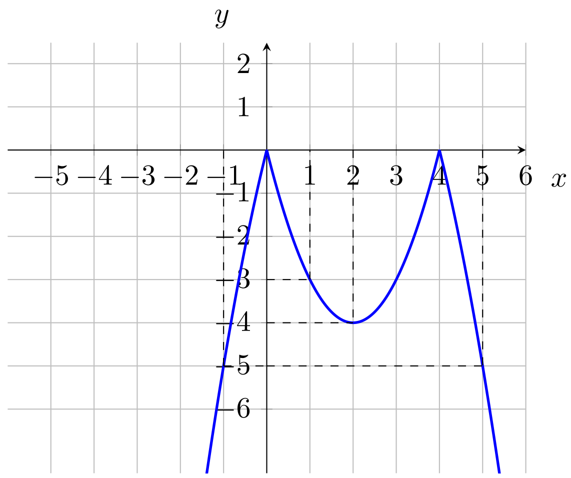
e osservando che per x negativi vale $|x| = -x$. Ora, il grafico di $2 \log(-x)$ è uguale al grafico di $2 \log x$ riflesso rispetto all'asse y. Perciò il grafico di $f(x)$ per x negativi risulta essere la riflessione rispetto all'asse y del grafico per x positivi determinato precedentemente. Risolvendo $f(x) = 0$ troviamo che la funzione tocca l'asse x in $x = \pm\sqrt{e}$. Inoltre notiamo che $f(\pm e) = 1$.



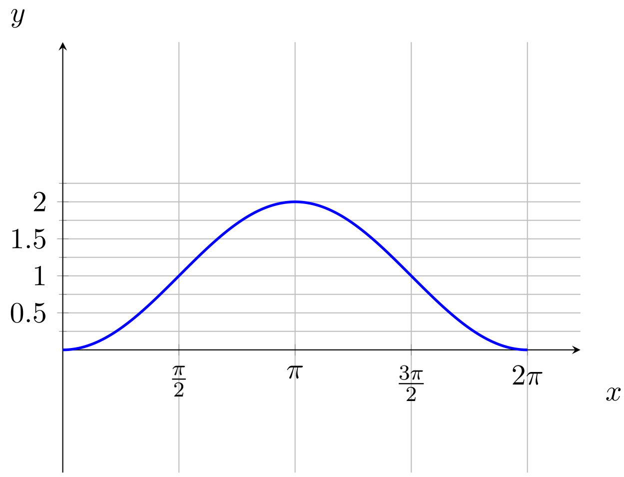
(c) Il dominio di $f(x)$ è determinato dalla condizione di esistenza della radice, ossia $x \geq 2$. L'equazione del grafico è $y = \sqrt{x-2} - 1$. L'addendo -2 nell'argomento della radice produce uno spostamento del grafico di $\sqrt{x}$ di 2 verso destra, $y = \sqrt{x-2}$. L'addendo -1 produce uno spostamento di 1 verso il basso. La funzione non tocca l'asse y. Risolvendo $y = f(x) = 0$ troviamo che tocca l'asse x in $x = 3$. Notiamo inoltre che $f(6) = 1$.



(d) Il dominio di f è $\mathbb{R}$ e il grafico ha equazione $y = -|x^2 - 4x|$. Partiamo dalla parabola $y = x^2 - 4x = x(x-4)$ che ha concavità verso l'alto, tocca l'asse x in $x = 0$ e $x = 4$, e ha vertice in $(2, -4)$. Prenderne il valore assoluto ($y = |x^2 - 4x|$) produce una riflessione rispetto all'asse x della porzione di parabola che ha ordinata negativa, ossia per $0 < x < 4$. Il segno meno davanti al valore assoluto produce un'ulteriore riflessione di tutto il grafico rispetto all'asse x, $y = -|x^2 - 4x|$. Calcoliamo i punti $f(5) = -5$, $f(1) = -3$, $f(-1) = -5$.



(e) La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ e il grafico ha equazione $y = 1 - \cos|x|$. Essendo $[0, 2\pi]$ un intervallo con valori solamente positivi, vale $\cos|x| = \cos x$. Moltiplicando per -1, $y = -\cos x$, riflette la funzione rispetto all'asse x. Aggiungere 1 sposta tutto il grafico verso l'alto, $y = 1 - \cos x$.



---

5. (a) Disegnare sul foglio a quadretti il grafico della seguente funzione, specificando l'equazione del grafico in ogni tratto, tutti i passaggi necessari per la costruzione di ogni tratto, le coordinate dei punti di intersezione con gli assi cartesiani e eventuali altri punti significativi.

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \sqrt{x} & 0 < x \leq 1 \\ \log(x) & 1 \leq x < e \\ x^2 - 1 & -2 \leq x < 0 \\ x - e & e < x \leq 2e \end{cases}$$

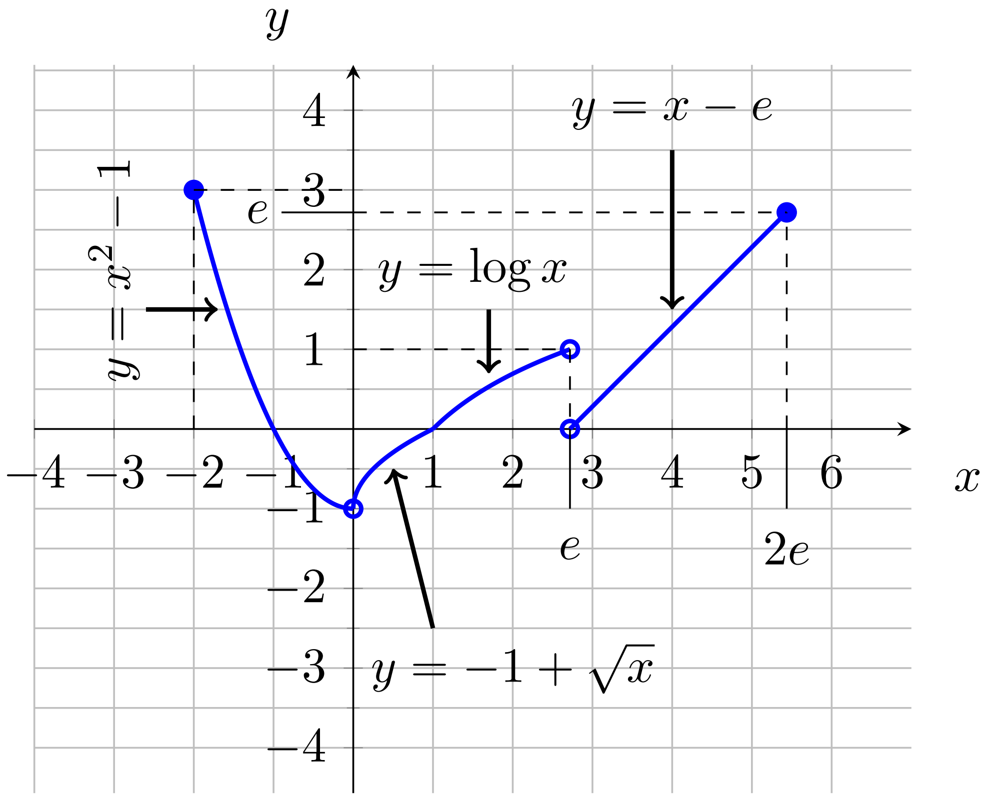
$\mathrm{dom} f = \ldots$ $\qquad$ $\mathrm{Imm} f = \ldots$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = \ldots$ $\qquad$ $f^{-1}(0) = \ldots$

$f^{-1}(1) = \ldots$ $\qquad$ $f^{-1}(-1) = \ldots$

(b) Disegnare il grafico di $|f(x)| - 1$

Soluzione



$$\mathrm{dom} f = [-2, 0[\quad \cup \quad]0, e[\quad \cup \quad]e, 2e], \qquad \mathrm{Imm} f =]-1, 3].$$

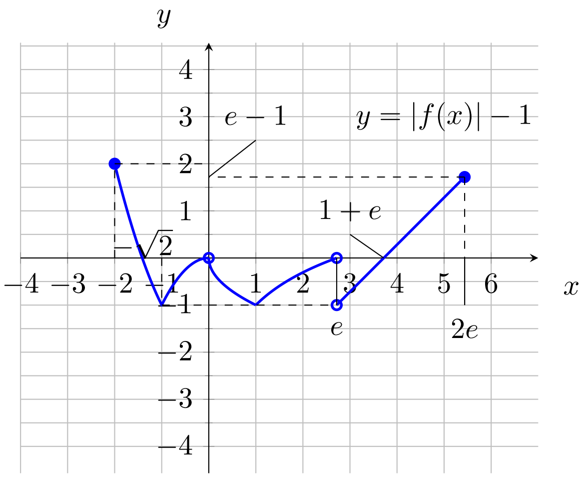
$$f\left(\frac{1}{4}\right) = -1 + \sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}; \qquad f^{-1}(0) = \{-1, 1\}.$$

$$f^{-1}(1) = \{-\sqrt{2}, 1 + e\}; \qquad f^{-1}(-1) = \emptyset.$$

La funzione $|f(x)| - 1$ è:

$$|f(x)| - 1 = \begin{cases} |-1 + \sqrt{x}| - 1 & 0 < x \leq 1 \\ |\log(x)| - 1 & 1 \leq x < e \\ |x^2 - 1| - 1 & -2 \leq x < 0 \\ |x - e| - 1 & e < x \leq 2e \end{cases}$$

Per disegnare il grafico $y = |f(x)| - 1$ osserviamo che, rispetto alla figura sopra, il valore assoluto riflette i tratti negativi rispetto all'asse x, portandoli sopra all'asse x. L'addendo -1 sposta quindi tutto il grafico verso il basso di 1. Le intersezioni con l'asse x sono ora $x = -\sqrt{2}$ e $x = 1 + e$.



6. Risolvere
   (a) $\log(4-2x) > -3$,
   (b) $\log(x^2-1) > \log(-2-2x)$,
   (c) $\log_4 8x < -\frac{1}{2}$,
   (d) $\log_{25} x \le \log_5 x^2$.

Soluzione

Imponendo le condizioni di esistenza dei logaritmi e usando il fatto che il logaritmo sia una funzione strettamente crescente, impostiamo i sistemi

(a)

$$\begin{cases} 4-2x>0 \\ 4-2x>e^{-3} \end{cases} \iff \begin{cases} 2x<4 \\ 2x<4-e^{-3} \end{cases} \iff \begin{cases} x<2 \\ x<2-\frac{e^{-3}}{2} \end{cases} \implies x<2-\frac{1}{2e^3}.$$

(b)

$$\begin{cases} x^2-1>0 \\ -2-2x>0 \\ x^2-1>-2-2x \end{cases} \iff \begin{cases} x<-1 \quad \underline{\text{o}} \quad x>1 \\ x<-1 \\ x^2+2x+1>0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x<-1 \quad \underline{\text{o}} \quad x>1 \\ x<-1 \\ (x+1)^2>0 \iff x\neq -1 \end{cases} \implies \quad x<-1$$

(c)

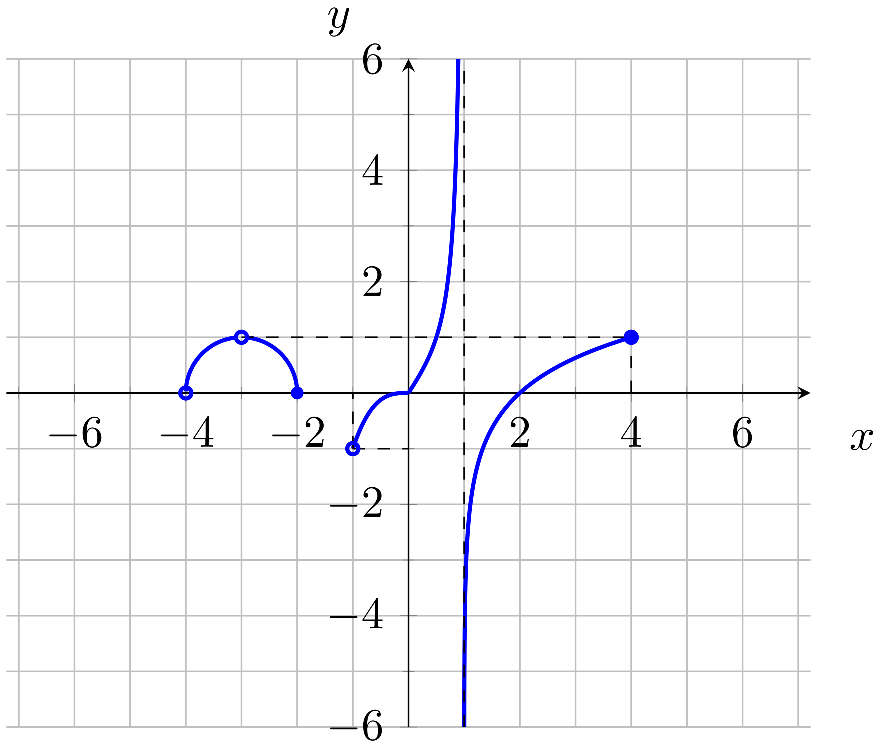
$$\begin{cases} x>0 \\ 8x<4^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \iff \begin{cases} x>0 \\ 8x<\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x>0 \\ x<\frac{1}{16} \end{cases} \implies \quad 0<x<\frac{1}{16}.$$

(d)

$$\begin{cases} x>0 \\ \frac{\log_5 x}{\log_5 25}\le \log_5 x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x>0 \\ \frac{1}{2}\log_5 x\le \log_5 x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x>0 \\ \frac{1}{2}\log_5 x-2\log_5 x\le 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x>0 \\ -\frac{3}{2}\log_5 x\le 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>0 \\ \log_5 x\ge 0 \end{cases} \implies x\ge 1.$$

7. Considerare la funzione f che ha il seguente grafico:



$$\mathrm{dom} f = \dots \qquad \mathrm{Imm} f = \dots$$
$$f(-1) = \dots \qquad f^{-1}(1) = \dots$$

(a) f è iniettiva?

(b) f è suriettiva?

(c) Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$ per $k \in [-1, 1]$.

Soluzione

$$\mathrm{dom} f =]-4,-3[\quad \cup \quad]-3,-2] \quad \cup \quad]-1,1[\quad \cup \quad]1,4]$$
$$\mathrm{Imm} f = \mathbb{R}$$
$$f(-1) = \text{non definita}, \qquad f^{-1}(1) = \left\{\frac{1}{2}, 4\right\}.$$

(a) Non è vero che $\forall y \in \mathrm{Imm} f \ \exists! \ x \in \mathrm{dom} f \ : \ f^{-1}(y) = x$. Infatti un controesempio è che la controimmagine di zero non è unica, essendo $f^{-1}(0) = \{-2, 0, 2\}$.

(b) La funzione f è suriettiva perchè $\mathrm{Imm} f = \mathbb{R}$.

(c) Dal grafico di $f(x)$ vediamo che il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$ con $k \in [-1, 1]$ è:
$$\begin{cases} 1 & \text{se } k = -1 \\ 2 & \text{se } -1 < k < 0 \text{ o } k = 1 \\ 3 & \text{se } k = 0 \\ 4 & \text{se } 0 < k < 1 \end{cases}$$