| | |
|---|---|
| COGNOME _____ | NON SCRIVETE QUI |
| NOME _____ | 1 2 3 4 5 6 7 |
| MATRICOLA ⌊⌋⌊⌋⌊⌋⌊⌋⌊⌋⌊⌋ | |
| CORSO SEGUITO Mat Fis | |

UNIVERSITÀ DI PARMA — C.L. in Matematica e Fisica

ESAME DI ELEMENTI DI MATEMATICA

A.A. 2019-2020 — PARMA, 19 GIUGNO 2020

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo **in stampatello** cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e venti minuti (CdL MATEMATICA). Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova. (CdL FISICA)

Svolgete prima i calcoli in brutta, poi svolgete ordinatamente gli esercizi su un altro foglio protocollo a quadretti, infine **copiate le sole risposte** su questo foglio.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo. Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

$16^2 = 256$

$\log 6 \approx 1{,}8$

$\log 4 \approx 1{,}4$

## 1) PARTE PRELIMINARE

a) Determinate il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{1 - \log(2x - 1)}$ .

b) Ordinate i seguenti numeri: $\frac{4}{7}$, $0$, $2(\sqrt{5} - 2)$ .

(sono richiesti i calcoli di tutti i confronti necessari, senza utilizzare i numeri decimali).

c) Determinate l'equazione della circonferenza di $C(-4, 1)$ e raggio $6$ .

Determinate l'equazione della retta $r$ passante per $(6, -1)$ e perpendicolare alla retta $4x - 2y + 8 = 0$ .

Determinate i punti di intersezione tra la circonferenza e la retta $r$.

Disegnate con precisione circonferenza, retta e punti di intersezione sul foglio a quadretti.

d) Determinate e disegnate tutte le soluzioni $x \in [0\,,\,2\pi]$ dell'equazione

$$2\cos^3 x + 3\cos^2 x + \cos x = 0 \ .$$

e) **(MAT)** Determinate tutte le soluzioni $x \in [0\,,\,2\pi]$ del seguente sistema

$$\begin{cases} \sqrt{3} + 2\cos x < 0 \\ \operatorname{sen} x < 0 \end{cases} .$$

f) **(MAT)** Negate la seguente proposizione:

$$\forall\, \mathbf{y} < \mathbf{0} \quad \exists\, \mathbf{x} \geq \mathbf{2} : \qquad \mathbf{P(x,y)} \ \Rightarrow \ [\ \mathbf{Q(x,y)} \ \underline{\mathbf{e}} \ \mathbf{R(x,y)}\ ]$$

g) **(MAT)** Considerate i due predicati:

$$\mathbf{P(x)} : \frac{x+3}{(x-2)^2} - \frac{1}{x} \geq 0 \qquad \mathbf{Q(x)} : \left[x < 2(\sqrt{5}-2) \ \underline{\mathbf{o}} \ x = 2\right]$$

Dopo aver determinato quali valori di $x$ rendono vera la proposizione $\mathbf{P(x)}$ e quali rendono vera $\mathbf{Q(x)}$ , dite (motivando la risposta) se è VERA o FALSA la seguente proposizione $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R} \qquad \mathbf{P(x)} \ \underline{\mathbf{o}} \ \mathbf{Q(x)}$ .

h) Disegnate sul foglio a quadretti con precisione (dominio, equazione del grafico, tutti i passaggi necessari per la costruzione, intersezioni con gli assi coordinati, punti significativi, asintoti) il grafico delle seguenti funzioni:
$f(x) = \log(x+6)\,, \qquad g(x) = \mathrm{e}^{|x|} - 2\,.$

---

2) $x^2 + 2x - 4 + |2x^2 + 7x + 4| < 0 \iff \ldots$

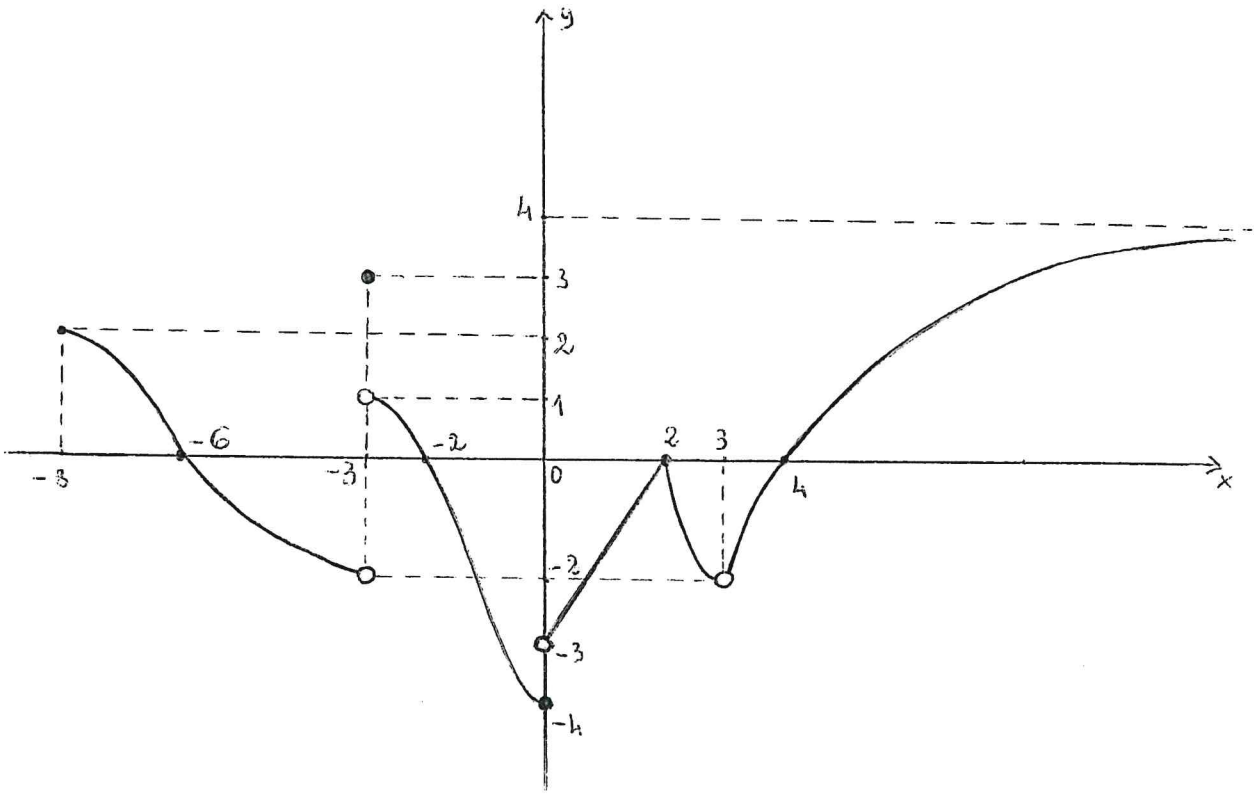
---

3) a) Disegnate con precisione sul foglio a quadretti il grafico della seguente funzione (in parte disegnata nella parte preliminare punto h) ), specificando l'equazione del grafico di ogni tratto, tutti i passaggi necessari per la costruzione di ogni tratto, le coordinate dei punti di intersezione con gli assi cartesiani, gli asintoti e eventuali altri punti significativi:

$$f(x) = \begin{cases} -\log(x+6) - 1 & \text{se } -6 < x \leq -2 \\ |\mathrm{e}^{|x|} - 2| & \text{se } x > -2 \end{cases}$$

---

4) Considerate la funzione $f$ che ha il seguente grafico:




dom $f = \ldots$, Imm $f = \ldots$

$f(-9) = \ldots\ldots$ $f(-3) = \ldots\ldots$ $f^{-1}(0) = \ldots\ldots$

Determinate sul foglio a quadretti il numero delle soluzioni dell'equazione

$f(x) = k$ per $k \in [-4, -1]$.

La funzione $f$ è iniettiva per $x \in [2,3[ \cup ]3,+\infty[$ : VERO o FALSO

MOTIVAZIONE:

---

5) Disegnate con precisione sul foglio a quadretti l'insieme di equazione

$4y^2 - x^2 = 4$ ,

dopo aver spiegato che cosa rappresenta e le sue caratteristiche.