COGNOME ______________________	NON SCRIVETE QUI
NOME ______________________	
MATRICOLA |_|_|_|_|_|_|	1 2 3 4 5 6 7
CORSO SEGUITO Mat Fis	

UNIVERSITÀ DI PARMA — C.L. in Matematica e Fisica

ESAME DI ELEMENTI DI MATEMATICA

A.A. 2019-2020 — PARMA, 19 GIUGNO 2020

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo **in stampatello** cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e venti minuti (CdL MATEMATICA). Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

Svolgete prima i calcoli in brutta, poi svolgete ordinatamente gli esercizi su un altro foglio protocollo a quadretti, infine **copiate le sole risposte** su questo foglio.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo. Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

$16^2 = 256$

$\log 6 \approx 1{,}8$

$\log 4 \approx 1{,}4$

1) **PARTE PRELIMINARE**

a) Determinate il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{1 - \log(2x-1)}$.

b) Ordinate i seguenti numeri: $\frac{4}{7}$, 0, $2(\sqrt{5}-2)$.

(sono richiesti i calcoli di tutti i confronti necessari, senza utilizzare i numeri decimali).

c) Determinate l'equazione della circonferenza di $C(-4,1)$ e raggio 6 .

Determinate l'equazione della retta r passante per $(6,-1)$ e perpendicolare alla retta $4x - 2y + 8 = 0$.

Determinate i punti di intersezione tra la circonferenza e la retta r.

Disegnate con precisione circonferenza, retta e punti di intersezione sul foglio a quadretti.

d) Determinate e disegnate tutte le soluzioni $x \in [0\,,\,2\pi]$ dell'equazione

$$2\cos^3 x + 3\cos^2 x + \cos x = 0 \ .$$

e) **(MAT)** Determinate tutte le soluzioni $x \in [0\,,\,2\pi]$ del seguente sistema

$$\begin{cases} \sqrt{3} + 2\cos x < 0 \\ \\ \operatorname{sen} x < 0 \end{cases} .$$

f) **(MAT)** Negate la seguente proposizione:

$$\forall\, \mathbf{y} < \mathbf{0} \quad \exists\, \mathbf{x} \geq \mathbf{2} : \qquad \mathbf{P(x,y)} \;\Rightarrow\; [\,\mathbf{Q(x,y)}\ \underline{\mathbf{e}}\ \mathbf{R(x,y)}\,]$$

g) **(MAT)** Considerate i due predicati:

$$\mathbf{P(x)} : \frac{x+3}{(x-2)^2} - \frac{1}{x} \geq 0 \qquad \mathbf{Q(x)} : [\,x < 2(\sqrt{5}-2)\ \ \underline{\mathbf{o}}\ \ x = 2\,]$$

Dopo aver determinato quali valori di x rendono vera la proposizione $\mathbf{P(x)}$ e quali rendono vera $\mathbf{Q(x)}$, dite (motivando la risposta) se è VERA o FALSA la seguente proposizione $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R} \qquad \mathbf{P(x)}\ \underline{\mathbf{o}}\ \mathbf{Q(x)}$.

h) Disegnate sul foglio a quadretti con precisione (dominio, equazione del grafico, tutti i passaggi necessari per la costruzione, intersezioni con gli assi coordinati, punti significativi, asintoti) il grafico delle seguenti funzioni:
$f(x) = \log(x+6)\,, \qquad g(x) = e^{|x|} - 2\,.$

---

2) $x^2 + 2x - 4 + |2x^2 + 7x + 4| < 0 \iff \ldots$ $x \in]-3,0[$

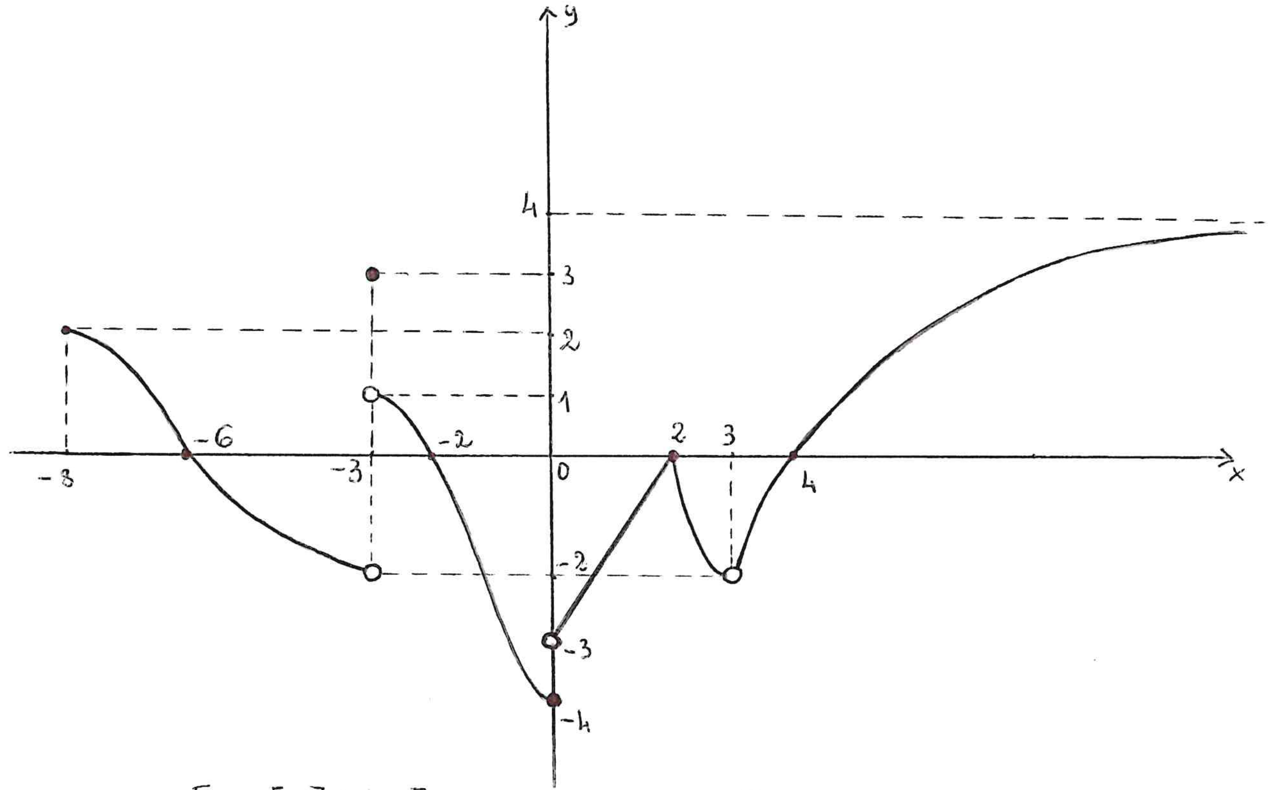
---

3) a) Disegnate con precisione sul foglio a quadretti il grafico della seguente funzione (in parte disegnata nella parte preliminare punto h)), specificando l'equazione del grafico di ogni tratto, tutti i passaggi necessari per la costruzione di ogni tratto, le coordinate dei punti di intersezione con gli assi cartesiani, gli asintoti e eventuali altri punti significativi:

$$f(x) = \begin{cases} -\log(x+6) - 1 & \text{se } -6 < x \leq -2 \\ \\ |e^{|x|} - 2| & \text{se } x > -2 \end{cases}$$

---

4) Considerate la funzione f che ha il seguente grafico:



dom f = $[-8, 3[\cup]3, +\infty[$ Imm f = $[-4, 4[$

$f(-9)$ = non esiste ($-9 \notin$ dom f) $f(-3) = 3$ $f^{-1}(0) = \{-6, -2, 2, 4\}$

Determinate sul foglio a quadretti il numero delle soluzioni dell'equazione

$f(x) = k$ per $k \in [-4, -1]$. $k \in [-4, -3]$ 1 sol.^{ne} $k \in]-3, -2]$ 2 sol.^{ni} $k \in]-2, -1]$ 5 sol.^{ni}

La funzione f è iniettiva per $x \in [2, 3[\cup]3, +\infty[$: VERO o $\boxed{\text{FALSO}}$

MOTIVAZIONE:

Negli intervalli $[2,3[$ e $]3,4]$ la funzione assume gli stessi valori quindi $\forall y \in]-2, 0]$ $\exists x_1 \in [2, 3[$, $x_2 \in]3, 4]$ $(x_1 \neq x_2)$: $f(x_1) = f(x_2)$.
Ad esempio $x = 2, x = 4 \in [2, 3[\cup]3, +\infty[$ e $f(2) = f(4) = 0$, cioè $y = 0$ ha 2 controimmagini.

5) Disegnate con precisione sul foglio a quadretti l'insieme di equazione

$$4y^2 - x^2 = 4 \ ,$$

dopo aver spiegato che cosa rappresenta e le sue caratteristiche.

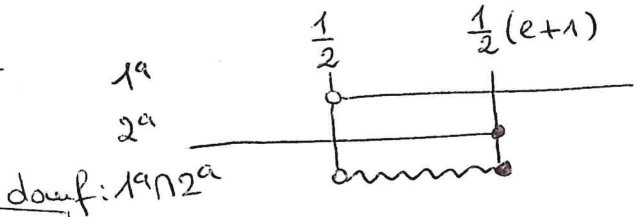
SOLUZIONE

1)a) $\mathrm{dom}f = \{x \in \mathbb{R} : \ 2x-1>0, \ 1-\log(2x-1) \geq 0\}$

$$\begin{cases} 2x-1>0 \\ \log(2x-1) \leq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 2x-1 \leq e \end{cases}$$ perchè $f(x)=\log x$ è una funzione crescente

$$\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 2x \leq e+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \leq \frac{1}{2}(e+1) \end{cases}$$

essendo $e+1>1$



$$\boxed{\mathrm{dom}f = \left]\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}(e+1)\right]}.$$

b) $\frac{4}{7} > 0 \qquad 2(\sqrt{5}-2) > 0 \iff \sqrt{5} > 2 \iff 5 > 4$ vero

quindi dobbiamo solo confrontare $\frac{4}{7}$ con $(2(\sqrt{5}-2)) = 2\sqrt{5}-4$

$$2\sqrt{5}-4 \overset{?}{>} \frac{4}{7} \iff 2\sqrt{5} > 4+4/7 \iff \sqrt{5} > 2+\frac{2}{7} = \frac{16}{7} \iff 7\sqrt{5} > 16$$

$\underset{\text{posso } (\cdot)^2}{\iff}$ $49 \cdot 5 > 256 \iff 245 > 256$ Falso

Sono numeri positivi

Allora l'ordine corretto è $\boxed{0 \quad 2(\sqrt{5}-2) \quad \frac{4}{7}}$

c) La circonferenza di $C(-4,1)$ e $R=6$ ha equazione

$$\boxed{(x+4)^2+(y-1)^2 = 36}.$$

La retta $4x-2y+8=0$ è in forma esplicita $y=2x+4$ con coefficiente angolare $m=2$. Allora la retta r ha coeff. angolare $m_r = -\frac{1}{2}$ da cui l'eq.^{ne} $y=-1-\frac{1}{2}(x-6)$

$$r: \ \boxed{y = -\frac{1}{2}x+2}.$$

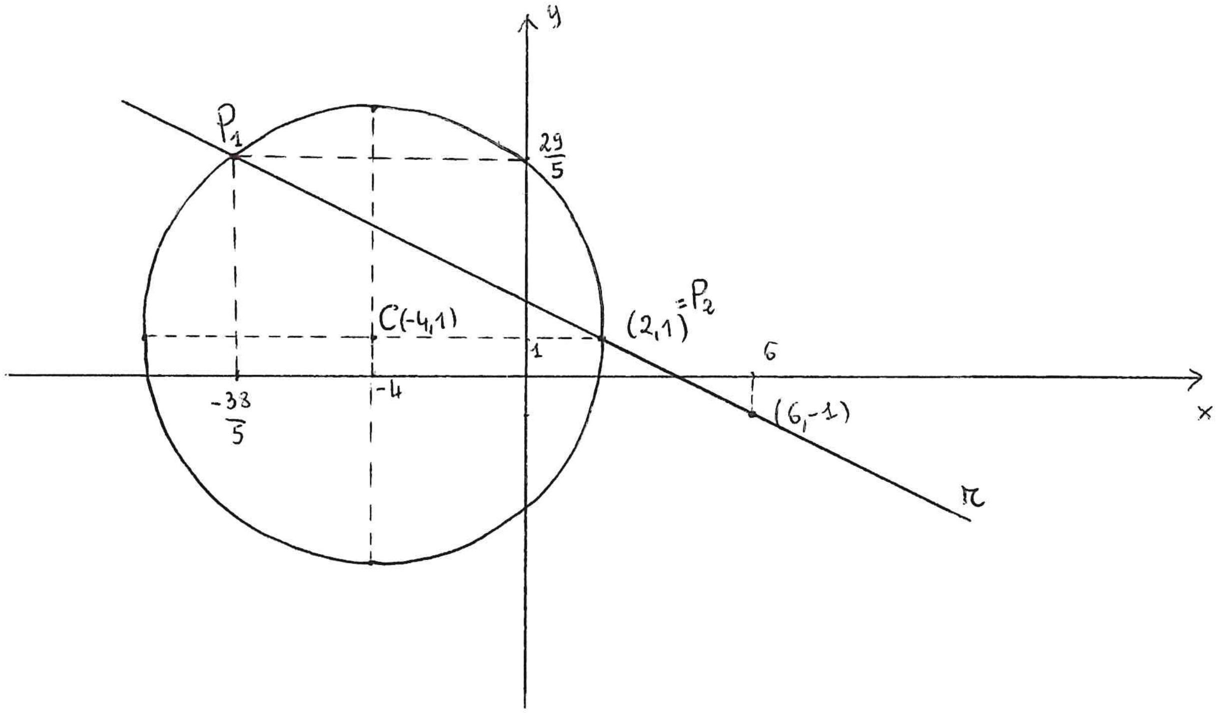
$$\begin{cases}(x+4)^2+(y-1)^2=36\\ y=-\frac{1}{2}x+2\end{cases}\qquad\begin{cases}(x+4)^2+\left(-\frac{1}{2}x+1\right)^2=36\\ \dots\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+8x+16+\frac{1}{4}x^2-x+1=36\\ \dots\end{cases}\qquad\begin{cases}\frac{5}{4}x^2+7x-19=0\\ \dots\end{cases}$$

$19\cdot5=95$
$95+49=144$

$$\begin{cases}x_{1,2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{49+5\cdot19}}{5/2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{144}}{5/2}=\dfrac{-7\pm12}{5/2}\\ \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=-\frac{38}{5}\ \text{o}\ x_2=2\\ y_1=\frac{19}{5}+2 \qquad y_2=1\end{cases}\qquad P_1=\left(\underset{-7{,}6}{\underset{\shortparallel}{-\frac{38}{5}}},\ \underset{5{,}8}{\underset{\shortparallel}{\frac{29}{5}}}\right)\quad P_2=(2,1)$$



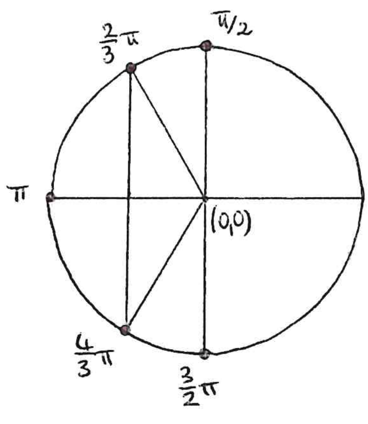
d) $\cos x\,(2\cos^2x+3\cos x+1)=0 \iff \cos x=0$ o $2\cos^2x+3\cos x+1=0$

$\cos x=t \quad 2t^2+3t+1=0 \quad t_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\dfrac{-3\pm1}{4}=\begin{cases}t_1=-1\\ t_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$

$\iff \cos x=0$ o $\cos x=-1$ o $\cos x=-\frac{1}{2}$

$\iff \left(x=\frac{\pi}{2}\ \text{o}\ x=\frac{3}{2}\pi\right)$ o $(x=\pi)$ o $\left(x=\frac{2}{3}\pi\ \text{o}\ x=\frac{4}{3}\pi\right)$

$S=\left\{\frac{\pi}{2},\frac{2}{3}\pi,\pi,\frac{4}{3}\pi,\frac{3}{2}\pi\right\}$

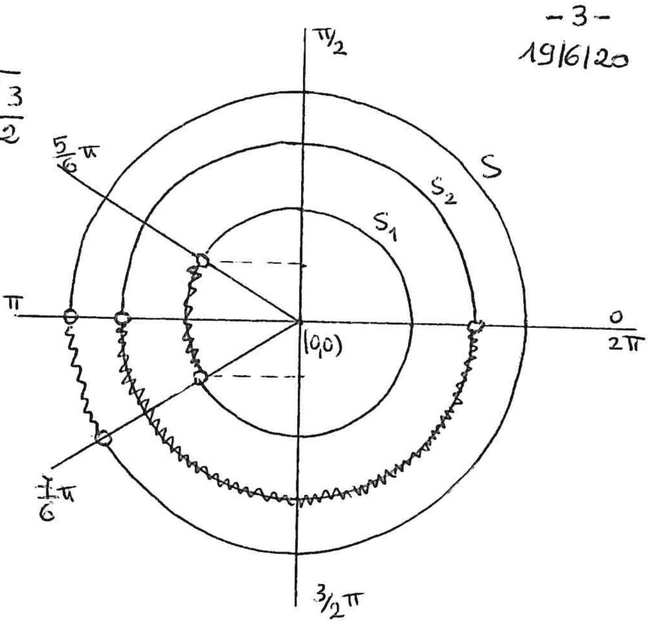


e) 1^a Dis.^{ne} $\sqrt{3}+2\cos x<0$ $\quad \cos x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_1 = \left]\frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi\right[$

2^a Dis^{ne} $\quad \operatorname{sen} x<0 \quad S_2 =]\pi, 2\pi[$

$$\boxed{S = S_1 \cap S_2 = \left]\pi, \frac{7}{6}\pi\right[}$$



f) $\exists y<0 : \forall x \geq 2 \quad P(x,y) \ \underline{E} \ \text{NON}\,(Q(x,y) \ \underline{E} \ R(x,y))$

$$\Updownarrow$$

$\exists y<0 : \forall x \geq 2 \quad P(x,y) \ \underline{E} \ (\text{NON}\, Q(x,y) \ \underline{O} \ \text{NON}\, R(x,y))$

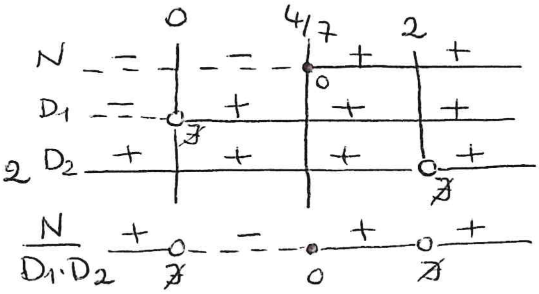
g) $P(x)$: $\quad \dfrac{x+3}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{x} \geq 0 \quad \dfrac{x(x+3)-(x-2)^2}{x(x-2)^2} \geq 0 \quad \dfrac{3x+4x-4}{x(x-2)^2} \geq 0$

$\dfrac{7x-4}{x(x-2)^2} \geq 0 \quad N = 7x-4 \geq 0 \quad x \geq \frac{4}{7}$

$D_1 = x>0$

$D_2 = (x-2)^2>0 \quad \forall x \neq 2$

$\frac{4}{7} < \frac{14}{7} = 2$

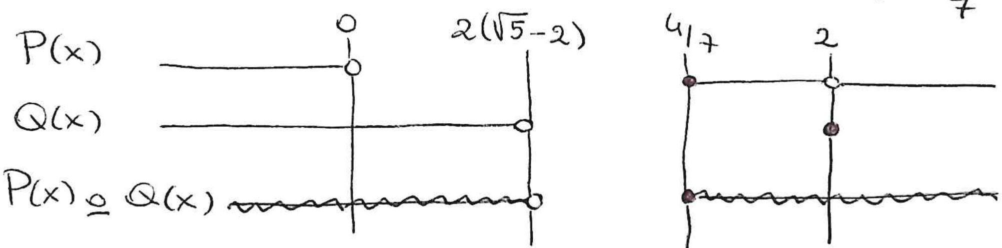


$P(x) =$ " $x \in]-\infty, 0[\cup \left[\frac{4}{7}, 2\right[\cup]2, +\infty[$ "

$x<0 \ \underline{o} \ \frac{4}{7} \leq x < 2 \ \underline{o} \ x>2$

$Q(x) =$ " $x < 2(\sqrt{5}-2) \ \underline{o} \ x = 2$ "

Poiché (VEDI ESERCIZIO b) $\quad 0 < 2(\sqrt{5}-2) < \frac{4}{7} < 2$ abbiamo



$P(x) \ \underline{o} \ Q(x) =$ " $x < 2(\sqrt{5}-2) \ \underline{o} \ x \geq \frac{4}{7}$ "

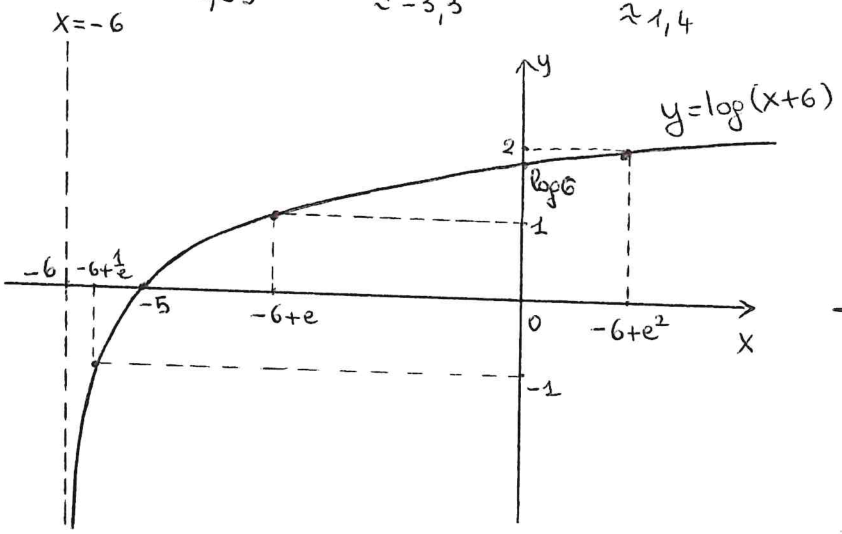
$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) \ \underline{o} \ Q(x)$ è FALSA perché se $x \in \left[2(\sqrt{5}-2), \frac{4}{7}\right[$ risulta che $P(x) \ \underline{o} \ Q(x)$ sia Falsa in quanto sono false sia $P(x)$ sia $Q(x)$.

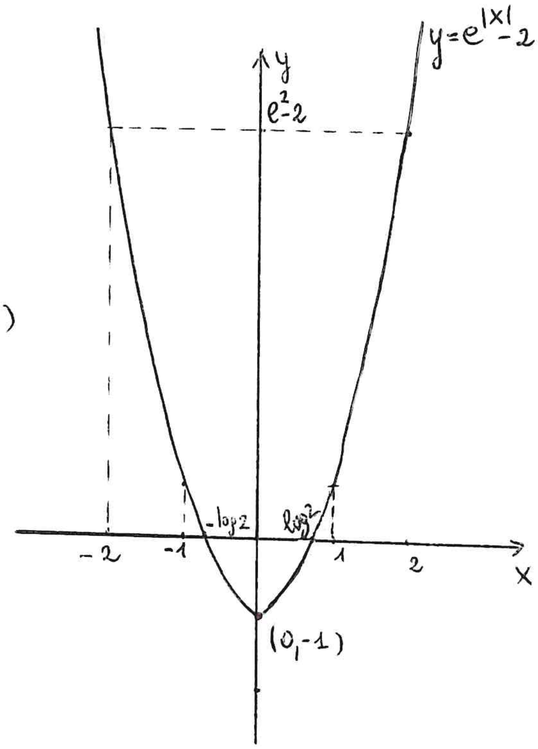
h) $f(x)=\log(x+6)$ $\quad \text{dom} f =]-6,+\infty[$ $\quad x=-6$ asintoto verticale

eq.ne del grafico: $y=\log(x+6)$ grafico del logaritmo spostato a sinistra di 6

$\cap$ asse x: $(-5,0)$ $\quad \cap$ asse y: $(0,\log 6)$ $\approx 1,8$

PUNTI: $\left(-6+\frac{1}{e},-1\right)$ $\approx -5,63$ $\quad (-6+e,1)$ $\approx -3,3$ $\quad (-6+e^2,2)$ $\approx 1,4$





$g(x)=e^{|x|}-2$ $\quad \text{dom}\, g=\mathbb{R}$ $\quad$ asintoti: nessuno

eq.ne del grafico: $y=e^{|x|}-2$ si tratta del grafico $y=e^{|x|}$ (ottenuto dal grafico di e^x simmetrizzando rispetto all'asse y la parte di grafico per $x\geq 0$) abbassato di 2

$\cap$ asse y: $(0,-1)$ $\quad \cap$ asse x: $e^{|x|}=2$ $\quad |x|=\log 2$ $\quad x=\pm\log 2$ $\quad (\log 2 \approx 0,7)$

PUNTI: $x=\pm 1$ $\quad y=e-2\approx 0,7$ $\quad x=\pm 2$ $\quad y=e^2-2\approx 5,4$

ES.3) <u>1° tratto</u> eq.ne $y=-\log(x+6)-1$ si tratta del grafico della funzione $f(x)$ del punto h) simmetrizzato rispetto all'asse x ($y=-\log(x+6)$) e poi abbassato di 1.

asintoti: sempre $x=-6$

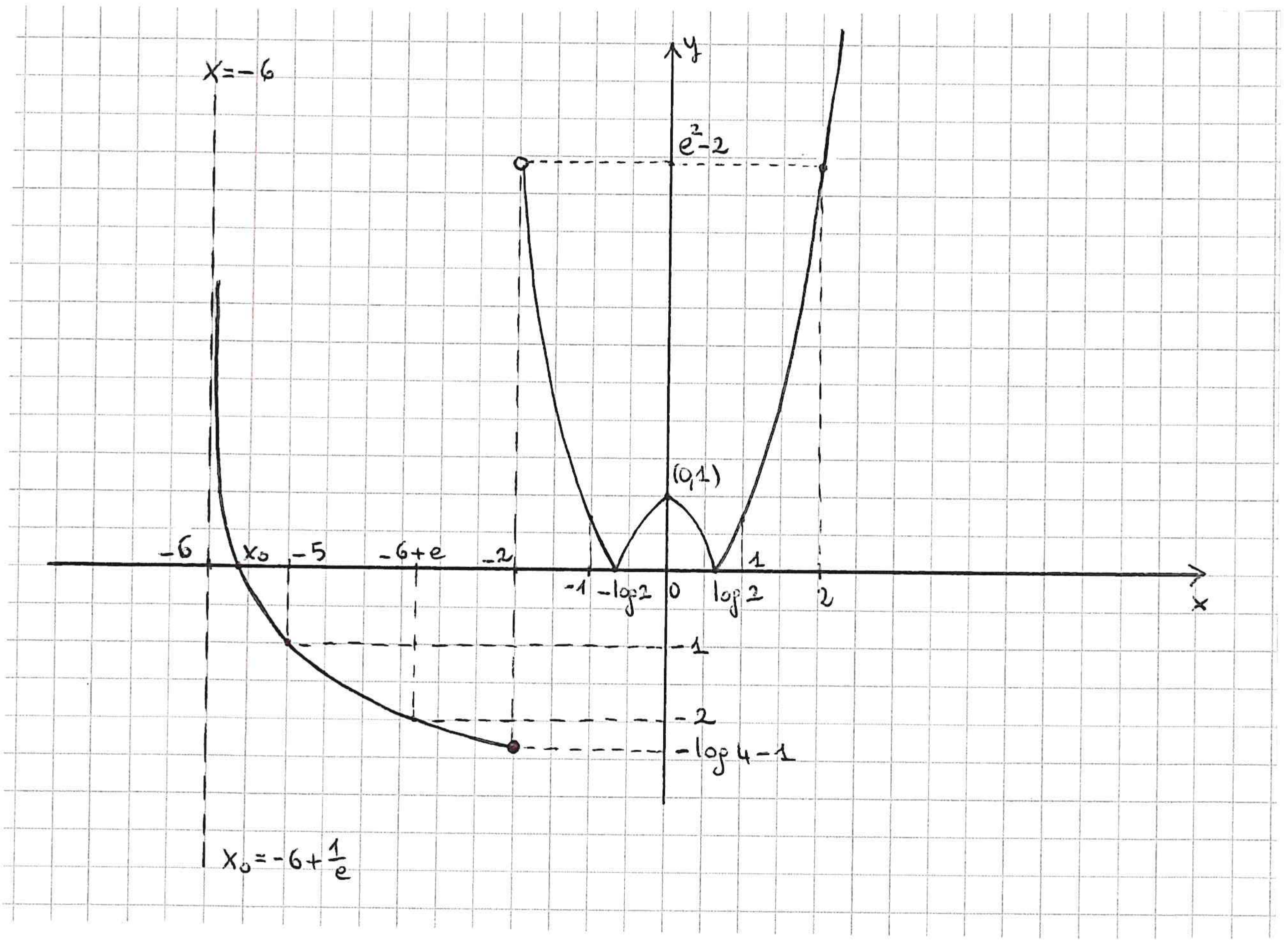
$\cap$ asse x: $\log(x+6)=-1$ $\quad x+6=e^{-1}$ $\quad x=-6+\frac{1}{e}\simeq-5{,}63$

PUNTI: $(-5,-1)$ $\quad(-6+e,-2)$ $\quad\left(-2,\underset{\simeq-2{,}4}{-\log4-1}\right)$

<u>2° tratto</u> eq.ne $y=|e^{|x|}-2|$ si tratta del valore assoluto del grafico della funzione $g(x)$ del punto h): quindi dove $y\geq0$ rimane $y=g(x)$ mentre la parte di grafico con $y<0$ viene simmetrizzata rispetto all'asse x.

$\cap$ asse x: sempre $(\pm\log2,0)$ $\quad\cap$ asse y: $(0,1)$

PUNTI: $x=-2$ $\quad y=|e^2-2|=e^2-2\simeq5{,}4$



ES. 2)

$$|2x^2+7x+4| < -x^2-2x+4 \iff \begin{cases} 2x^2+7x+4 < -x^2-2x+4 \\ 2x^2+7x+4 > x^2+2x-4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x^2+9x<0 \\ x^2+5x+8>0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x(x+3)<0 \\ \forall x\in\mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} -3<x<0 & S_1 \\ \forall x\in\mathbb{R} & S_2 \end{cases}$$

$x_1=0 \quad x_2=-3$ valori interni x_1 x_2

$\hookrightarrow x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-32}}{2}$ $\quad \Delta<0$ $\quad$ $x^2+5x+8>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$$\boxed{S=S_1\cap S_2=S_1=]-3,0[}$$

ES. 5) Dividendo per 4 otteniamo $y^2-\dfrac{x^2}{4}=1$ ossia un'iperbole riferita agli asintoti nella forma $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$ con centro $C(0,0)$, $a=2$, $b=1$, asintoti $y=\pm\dfrac{b}{a}x \rightarrow y=\pm\dfrac{1}{2}x$ $\xrightarrow{}$ per $(\pm2,\pm1)$, $\cap$ asse x ϕ $\left(-\dfrac{x^2}{4}=1 \iff x^2=-4\right.$ IMPOSSIBILE $\left.\right)$, $\cap$ asse y $y^2=1$ $y=\pm1$ $(0,1)$ $(0,-1)$.

Altri punti: $x=\pm2 \Rightarrow y^2=2$ $\quad (\pm2,\sqrt{2})\ (\pm2,-\sqrt{2})$

$x=\pm4 \Rightarrow y^2-4=1 \Rightarrow y^2=5 \quad y=\pm\sqrt{5} \quad (\pm4,\pm\sqrt{5})$