

COGNOME _____ NOME _____ MATRICOLA                     CORSO SEGUITO                      Mat      Fis	NON SCRIVETE QUI							
	<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px;">1</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">2</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">3</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">4</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">5</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">6</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">7</td> </tr> </table> <div style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 70px; display: inline-block;"></div>	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7		

UNIVERSITÀ DI PARMA — C.L. in *Matematica e Fisica*  
 ESAME DI ELEMENTI DI MATEMATICA  
 A.A. 2019-2020 — PARMA, 3 LUGLIO 2020

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo **in stampatello** cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

Svolgete prima i calcoli in brutta, poi svolgete ordinatamente gli esercizi su un altro foglio protocollo a quadretti, infine **copiate le sole risposte** su questo foglio.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo. Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

1) **PARTE PRELIMINARE**

a) Determinate l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{aligned}
 14^2 &= 196 \\
 37^2 &= 1369 \\
 \frac{2}{3}\sqrt{5} &\approx 1,5
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 \frac{\frac{5}{2}x - 1}{x} \leq \frac{8}{x + 2} \\
 2x^3 - 4x - x^2 + 3 < 0 \\
 |x| + \sqrt{5} \neq 0.
 \end{cases}$$

b) Dati i due insiemi  $A = ] - \infty, -2] \cup ] \frac{2}{7}, +\infty[$ ,  $B = [0, 2\sqrt{7} - 5[$ , allora:

$A \cap B = \dots$                        $A \setminus B = \dots$

(sono richiesti i calcoli di tutti i confronti necessari, senza utilizzare i numeri decimali).

c) Determinate l'equazione della parabola di vertice  $V(-2, 2)$  e passante per  $(-4, \frac{8}{3})$ .

Determinate l'equazione della retta  $r$  passante per i due punti  $(-2, 2)$  e  $(-6, \frac{14}{3})$ .

Disegnate con precisione la parabola e la retta sul foglio a quadretti.

- d) (FIS) Determinate e disegnate tutte le soluzioni  $x \in [0, 2\pi]$  dell'equazione  
 $8 \cos^3 x - 6 \cos x = 0$ .
- d) (MAT) Determinate tutte le soluzioni  $x \in [0, 2\pi]$  del seguente sistema

$$\begin{cases} 8 \cos^3 x - 6 \cos x = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} < \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

e)  $\log_{\frac{1}{5}} 25 + \frac{1}{9} 16^{\log_2 3} = \dots$

- f) (MAT) Negate la seguente proposizione:

$$\forall y < 0 \quad \exists x \geq 3 : [P(x, y) \wedge Q(x, y)] \wedge R(x, y)$$

- g) (MAT) Considerate i due predicati:

$$P(x) : \frac{1}{2} \leq |x| \leq 3 \quad Q(x) : 3 - 16x^2 < 0$$

Dopo aver determinato quali valori di  $x$  rendono vera la proposizione  $P(x)$  e quali rendono vera  $Q(x)$ , dite (motivando la risposta) se è VERA o FALSA la seguente proposizione

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad P(x) \Rightarrow Q(x).$$

- g) (FIS) Determinate tutte le soluzioni della disequazione:

$$(3 - 16x^2)(1 - \log_3(x^2 - 2x)) > 0.$$

- h) Disegnate sul foglio a quadretti con precisione (dominio, equazione del grafico, tutti i passaggi necessari per la costruzione, intersezioni con gli assi coordinati, punti significativi, asintoti) il grafico delle seguenti funzioni:

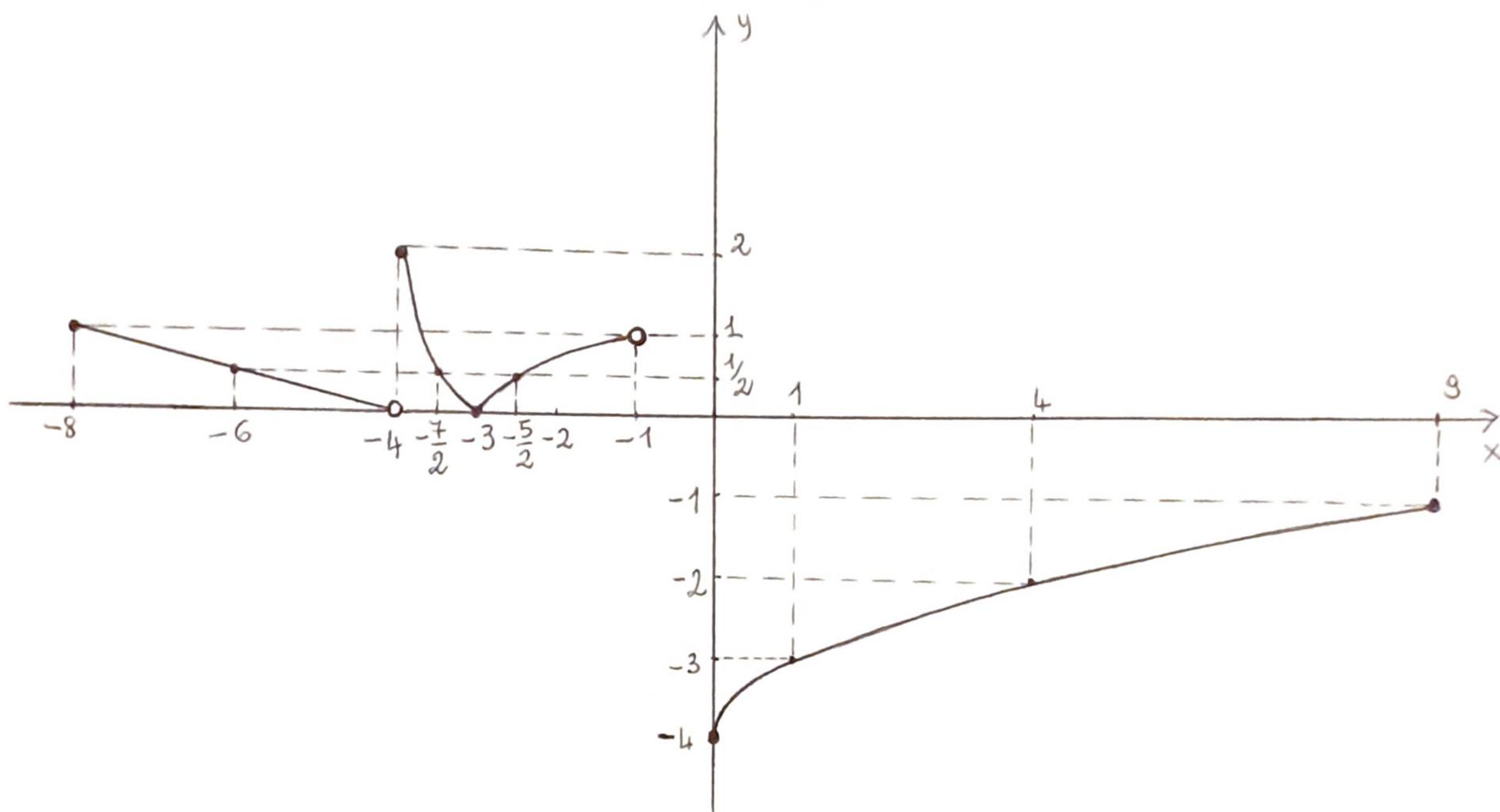
$$f(x) = e^{x-2}, \quad g(x) = \sqrt{|x|}.$$

2)  $1 + x - \sqrt{4x + x^2} < 0 \iff \dots$

- 3) a) Disegnate con precisione sul foglio a quadretti il grafico della seguente funzione (in parte disegnata nella parte preliminare punto h)), specificando l'equazione del grafico di ogni tratto, tutti i passaggi necessari per la costruzione di ogni tratto, le coordinate dei punti di intersezione con gli assi cartesiani, gli asintoti e eventuali altri punti significativi:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} - 3 & \text{se } -9 \leq x \leq 0 \\ |e^{x-2} - 1| & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

4) Considerate la funzione  $f$  che ha il seguente grafico:



$\text{dom } f = \dots,$

$\text{Imm } f = \dots$

$f(-4) = \dots \quad f(-1) = \dots \quad f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \dots$

Determinate sul foglio a quadretti il numero delle soluzioni dell'equazione

$f(x) = k$  per  $k \in [-2, 1]$ .

La funzione  $f$  è decrescente per  $x \in [-8, -3]$ : VERO o FALSO

MOTIVAZIONE:

5) Spiegate che cosa rappresentano gli insiemi di equazione

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y + 16 = 0, \quad (x + 2)^2 + 4(y - 2)^2 = 4$$

e disegnatele con precisione sul foglio a quadretti.

(MAT) Determinate le intersezioni tra i due insiemi e individuatele sul disegno.

6) (FIS) Determinate l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$\frac{1}{2} \leq |x - 1| \leq 3.$$