

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA

--	--	--	--	--	--	--

CORSO SEGUITO Mat Fis

NON SCRIVETE QUI

1	2	3	4	5	6	7
---	---	---	---	---	---	---

UNIVERSITÀ DI PARMA — C.L. in Matematica e Fisica

ESAME DI ELEMENTI DI MATEMATICA

A.A. 2019-2020 — PARMA, 3 LUGLIO 2020

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo **in stampatello** cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

Svolgete prima i calcoli in brutta, poi svolgete ordinatamente gli esercizi su un altro foglio protocollo a quadretti, infine **copiate le sole risposte** su questo foglio.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo. Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

1) **PARTE PRELIMINARE**

a) Determinate l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\frac{5}{2}x - 1}{x} \leq \frac{8}{x+2} \\ 2x^3 - 4x - x^2 + 3 < 0 \\ |x| + \sqrt{5} \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 14^2 &= 196 \\ 37^2 &= 1369 \\ \frac{2}{3}\sqrt{5} &\approx 1,5 \end{aligned}$$

b) Dati i due insiemi $A =] - \infty, -2] \cup] \frac{2}{7}, +\infty[$, $B = [0, 2\sqrt{7} - 5[$, allora:

$$A \cap B =] \frac{2}{7}, 2\sqrt{7} - 5[$$

$$A \setminus B =] - \infty, -2] \cup [2\sqrt{7} - 5, +\infty[$$

(sono richiesti i calcoli di tutti i confronti necessari, senza utilizzare i numeri decimali).

c) Determinate l'equazione della parabola di vertice $V(-2, 2)$ e passante per $(-4, \frac{8}{3})$.

Determinate l'equazione della retta r passante per i due punti $(-2, 2)$ e $(-6, \frac{14}{3})$.

Disegnate con precisione la parabola e la retta sul foglio a quadretti.

d) (FIS) Determinate e disegnate tutte le soluzioni $x \in [0, 2\pi]$ dell'equazione

$$8 \cos^3 x - 6 \cos x = 0 .$$

d) (MAT) Determinate tutte le soluzioni $x \in [0, 2\pi]$ del seguente sistema

$$\begin{cases} 8 \cos^3 x - 6 \cos x = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2} . \end{cases}$$

e) $\log_{\frac{1}{5}} 25 + \frac{1}{9} 16^{\log_2 3} = \frac{17}{9}$.

f) (MAT) Negate la seguente proposizione:

$$\forall y < 0 \quad \exists x \geq 3 : \quad [P(x,y) \wedge Q(x,y)] \wedge R(x,y)$$

g) (MAT) Considerate i due predicati:

$$P(x) : \frac{1}{2} \leq |x| \leq 3 \quad Q(x) : 3 - 16x^2 < 0$$

Dopo aver determinato quali valori di x rendono vera la proposizione $P(x)$ e quali rendono vera $Q(x)$, dite (motivando la risposta) se è VERA o FALSA la seguente proposizione

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) \Rightarrow Q(x) .$$

g) (FIS) Determinate tutte le soluzioni della disequazione:

$$(3 - 16x^2)(1 - \log_3(x^2 - 2x)) > 0 .$$

h) Disegnate sul foglio a quadretti con precisione (dominio, equazione del grafico, tutti i passaggi necessari per la costruzione, intersezioni con gli assi coordinati, punti significativi, asintoti) il grafico delle seguenti funzioni:

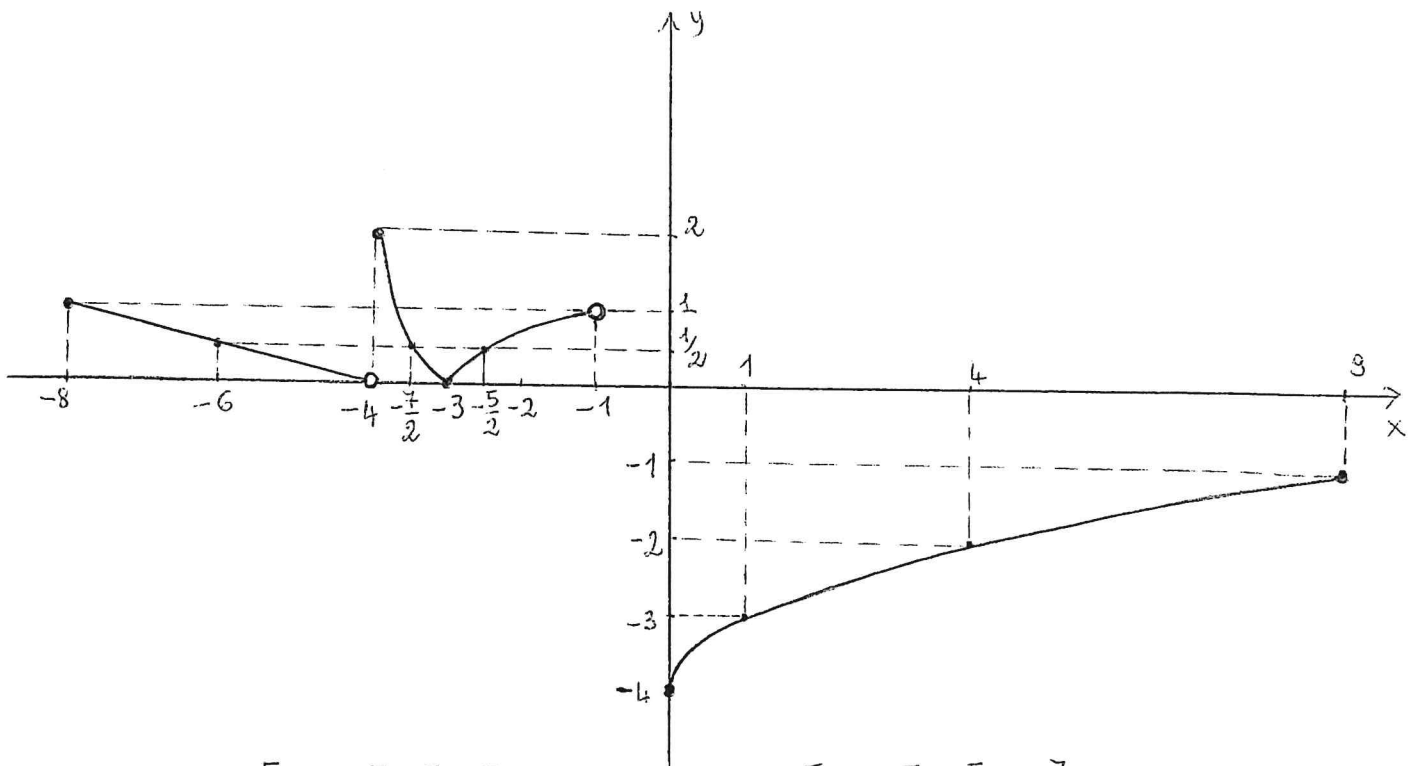
$$f(x) = e^{x-2}, \quad g(x) = \sqrt{|x|} .$$

$$2) \quad 1 + x - \sqrt{4x + x^2} < 0 \iff \dots x \in]-\infty, -4] \cup]\frac{1}{2}, +\infty[$$

3) a) Disegnate con precisione sul foglio a quadretti il grafico della seguente funzione (in parte disegnata nella parte preliminare punto h)), specificando l'equazione del grafico di ogni tratto, tutti i passaggi necessari per la costruzione di ogni tratto, le coordinate dei punti di intersezione con gli assi cartesiani, gli asintoti e eventuali altri punti significativi:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} - 3 & \text{se } -9 \leq x \leq 0 \\ |e^{x-2} - 1| & \text{se } x > 0 . \end{cases}$$

4) Considerate la funzione f che ha il seguente grafico:



$$\text{dom } f = [-8, -4[\cup [0, 9]$$

$$\text{Imm } f = [-4, 1] \cup [0, 2]$$

$$f(-4) = 2 \dots \quad f(-1) = \dots \quad f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \left\{-6, -\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right\}$$

$-1 \notin \text{dom } f$

Determinate sul foglio a quadretti il numero delle soluzioni dell'equazione

$$f(x) = k \text{ per } k \in [-2, 1].$$

$k \in [-2, -1]$ 1 sol.
 $k \in]-1, 0[$ 0 sol.
 $k = 0$ 1 sol.
 $k \in]0, 1[$ 3 sol.
 $k = 1$ 2 sol.

La funzione f è decrescente per $x \in [-8, -3]$: VERO o **FALSO**

MOTIVAZIONE: Def. f decrescente $\forall x_1, x_2 \in [-8, -3] \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

invece se $x_1 = -6 < x_2 = -4$ si ha $f(-6) = \frac{1}{2} < f(-4) = 2$

f è decrescente su $[-8, -4[$ e su $[-4, -3]$ ma non sull'U dei due intervalli

5) Spiegate che cosa rappresentano gli insiemi di equazione

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y + 16 = 0, \quad (x+2)^2 + 4(y-2)^2 = 4$$

e disegnatele con precisione sul foglio a quadretti.

(MAT) Determinate le intersezioni tra i due insiemi e individuatele sul disegno.

6) (FIS) Determinate l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$\frac{1}{2} \leq |x-1| \leq 3.$$

SOLUZIONE

ES. 1) (a) 1^a dis. ^{ue} $\frac{\frac{5}{2}x-1}{x} - \frac{8}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(\frac{5}{2}x-1)(x+2)-8x}{x(x+2)} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{\frac{5}{2}x^2 + 4x - 2 - 8x}{x(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{5}{2}x^2 - 4x - 2}{x(x+2)} \leq 0$

$N = \frac{5}{2}x^2 - 4x - 2 \geq 0 \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+5}}{\frac{5}{2}} = \frac{2 \pm 3}{\frac{5}{2}} = \begin{cases} x_1 = \frac{2}{5} \cdot (-1) = -\frac{2}{5} \\ x_2 = \frac{2}{5} \cdot 5 = 2 \end{cases}$

$N \geq 0 \quad x \leq -\frac{2}{5} \text{ o } x \geq 2$

$D_1 = x > 0 \quad x > 0$

$D_2 = (x+2) > 0 \quad x > -2$

$\frac{N}{D_1 \cdot D_2} \geq 0$

$-2 < -1 < -\frac{2}{5} < 0$

$S_1 =]-\frac{2}{5}, 2]$

2^a dis. ^{ue} $2x^3 - x^2 - 4x + 3 < 0$ decomponiamo il polinomio

$P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3 \quad P(1) = 2 - 1 - 4 + 3 = 0$

$P(x) = (x-1)(2x^2 + x - 3) =$
 $= (x-1)^2(2x+3)$

$(2x^2 + x - 3 = (x-1)(2x+3))$

$P(x) \geq 0 \quad F_1 = (x-1)^2 \geq 0 \quad \forall x \text{ con } F_1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$F_2 = 2x+3 \geq 0 \quad x \geq -\frac{3}{2}$

$F_1 \geq 0$

$F_2 \geq 0$

$P(x) \geq 0$

$S_2 =]-\infty, -\frac{3}{2}]$

3^a dis. ^{ue} $|x| + \sqrt{5} \neq 0$ vera $\forall x \in \mathbb{R}$ poiché $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| + \sqrt{5} \geq \sqrt{5} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$S_3 = \mathbb{R}$

$S = \text{Sol.}^{\text{ue}} = S_1 \cap S_2 \cap S_3 =]-\frac{2}{5}, -\frac{3}{2}] \quad -2 < -\frac{3}{2} < -1$

S_1

S_2

S_3

S

$S =]-\frac{2}{5}, -\frac{3}{2}]$

(b) $2\sqrt{7}-5 > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{7} > 5 \Leftrightarrow 28 > 25 \text{ VERO}$

Sol. ^{ue} - 2.

($\cdot$)²
sono entrambi
positivi

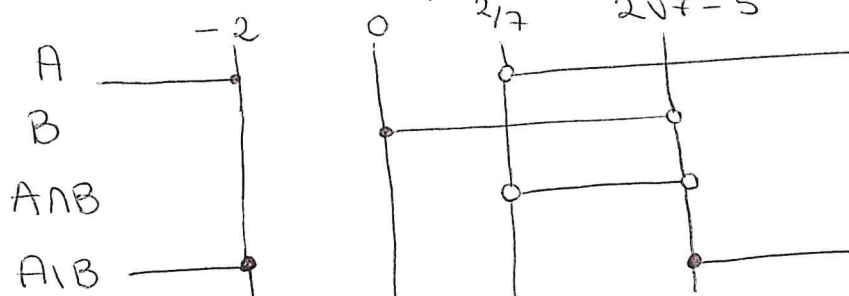
quindi dobbiamo solo confrontare $\frac{2}{7}$ con $2\sqrt{7}-5$

$$\frac{2}{7} < 2\sqrt{7}-5 \Leftrightarrow 2\sqrt{7} > \frac{2}{7}+5 = \frac{37}{7} \Leftrightarrow 14\sqrt{7} > 37 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 196 \cdot 7 > 37^2 = 1369 \Leftrightarrow 1372 > 1369 \text{ VERO}$$

$\frac{196 \cdot 7}{7} = 1372$

allora $-2 < 0 < \frac{2}{7} < 2\sqrt{7}-5$



$$A \cap B =] \frac{2}{7}, 2\sqrt{7}-5 [$$

$$A \cup B =]-\infty, -2] \cup [2\sqrt{7}-5, +\infty [$$

(c) $y = a(x+2)^2 + 2$ generica parabola di $V(-2, 2)$

impongo il passaggio per $(-4, \frac{8}{3})$: $\frac{8}{3} = a(-4+2)^2 + 2 \quad \frac{8}{3} = 4a + 2$

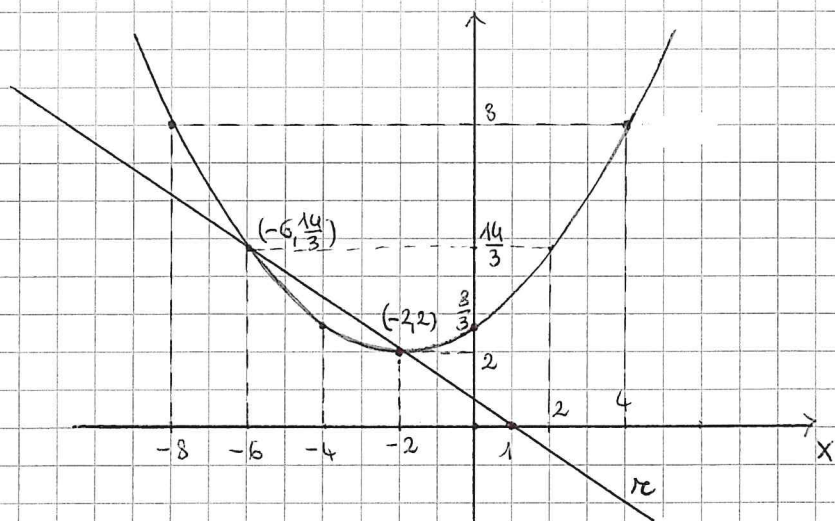
$$4a = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3} \quad a = \frac{1}{6} \quad y = \frac{1}{6}(x+2)^2 + 2 \text{ oppure } y = \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$$

la parabola passa per $(0, \frac{8}{3})$, $(-4, \frac{8}{3})$ e non interseca l'asse x essendo rivolta verso l'alto. Se $x = -8$ o $x = 4$ si ha $y = 8$.

retta $m_r = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{14}{3}-2}{-6+2} = \frac{\frac{8}{3}}{-4} = -\frac{2}{3}$

e: $y = 2 - \frac{2}{3}(x+2)$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \text{ per } (1, 0) \text{ e } (0, \frac{2}{3})$$



Non è richiesto ma la retta r e la parabola si intersecano in $(-2, 2)$ e $(-6, \frac{14}{3})$

(d) $8\cos^3 x - 6\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x (8\cos^2 x - 6) = 0 \Leftrightarrow$ Sol. ue - 3 -

$$\cos x = 0 \quad \text{opp} \quad \cos^2 x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \cos x = 0 \quad \text{opp} \quad \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow (x = \frac{\pi}{2} \text{ opp } x = \frac{3\pi}{2}) \quad \text{opp} \quad (x = \frac{\pi}{6} \text{ opp } x = \frac{5\pi}{6} \text{ opp } x = \frac{7\pi}{6} \text{ opp } x = \frac{11\pi}{6})$$

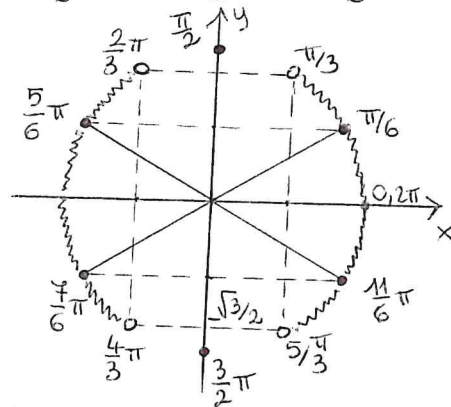
$$\text{S'equazione} = \left\{ x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{5\pi}{6}, x = \frac{7\pi}{6}, x = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{11\pi}{6} \right\}$$

(FINE ESERCIZIO FISICA)

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$S'_{\text{disegna}} : 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \quad \text{opp} \quad \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} \quad \text{opp} \quad \frac{5\pi}{3} < x \leq 2\pi$$



Quindi le soluzioni del sistema sono i

4 angoli $S_{\text{Sistema}} = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}.$

(e) $\log_{\frac{1}{5}} 25 + \frac{1}{9} 16^{\log_2 3} \stackrel{(1)}{=} -\log_5 5^2 + \frac{1}{9} \cdot (2^4)^{\log_2 3} =$

$$\stackrel{(2)}{=} -2 + \frac{1}{9} \cdot (2)^{4 \log_2 3} \stackrel{(3)}{=} -2 + \frac{1}{9} 2^{\log_2 3^4} = -2 + \frac{1}{9} 2^{\log_2 81} =$$

$$\stackrel{(4)}{=} -2 + \frac{1}{9} \cdot 81 = -2 + 9 = \boxed{7}$$

(1) $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x \quad \forall x > 0 \quad a > 0, a \neq 1$

(2) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

(3) $m \log_a b = \log_a b^m \quad \forall b > 0$

(4) $a^{\log_a b} = b \quad \forall b > 0.$

⊕ (MAT)

$$\exists y < 0 : \forall x \geq 3 \quad \text{Non} \left\{ [P(x,y) \text{ opp } Q(x,y)] \text{ e } R(x,y) \right\}$$

$$\Leftrightarrow \exists y < 0 : \forall x \geq 3 \quad \text{Non} [P(x,y) \text{ opp } Q(x,y)] \text{ opp } \text{Non } R(x,y)$$

$$\Leftrightarrow \exists y < 0 : \forall x \geq 3 \quad [\text{Non } P(x,y) \text{ e } \text{Non } Q(x,y)] \text{ opp } \text{Non } R(x,y).$$

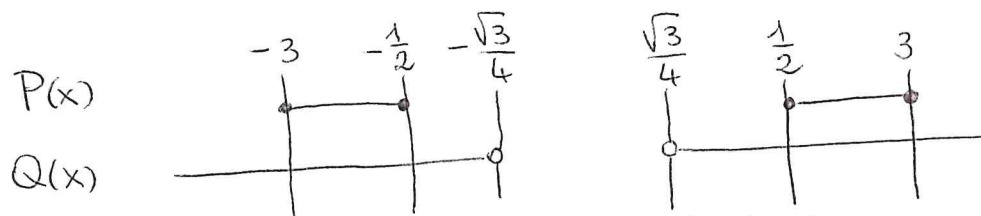
(g) (MAT) $P(x): \frac{1}{2} \leq |x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq -\frac{1}{2} \text{ opp } \frac{1}{2} \leq x \leq 3$

$$Q(x): 3 - 16x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 > \frac{3}{16} \Leftrightarrow x < -\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ opp } x > \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Sicuramente $\frac{\sqrt{3}}{4} < 1 < 3$: confrontiamo $\frac{1}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{4}$

$$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow 4 < 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 2 < \sqrt{3} \Leftrightarrow 4 < 3 \quad \text{Falso}$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{4} < \frac{1}{2}}$$



$\forall x P(x) \Rightarrow Q(x)$ è VERA in quanto tutti gli x che verificano $P(x)$ rendono vera anche $Q(x)$. In particolare non è possibile trovare un valore di x che verifichi $P(x)$ ma non $Q(x)$.

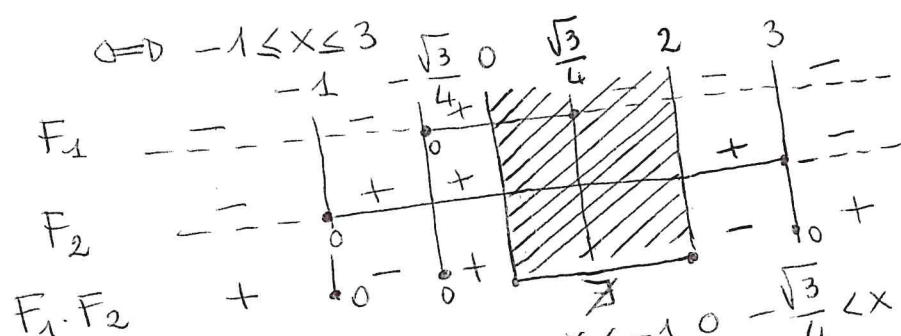
g) (FIS) Dis.^{ne} PRODOTTO C.E. $x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ o } x > 2$

$$F_1 = (3 - 16x^2) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{3}{16} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{4} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$F_2 = 1 - \log_3(x^2 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow \log_3(x^2 - 2x) \leq 1 = \log_3 3 \Leftrightarrow \log_3 x \text{ è una funzione crescente}$$

$$x^2 - 2x \leq 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$$



$$\text{da cui } F_1 \cdot F_2 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ o } -\frac{\sqrt{3}}{4} < x < 0 \text{ o } x > 3$$

$$S =]-\infty, -1[\cup]-\frac{\sqrt{3}}{4}, 0[\cup]3, +\infty[$$

$$\text{ES. 2) } \sqrt{x^2 + 4x} > 1 + x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x \geq 0 \\ 1 + x < 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x^2 + 4x \geq 0 \\ 1 + x \geq 0 \\ x^2 + 4x > (1+x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4 \text{ o } x \geq 0 \\ x < -1 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x \leq -4 \text{ o } x \geq 0 \\ x \geq -1 \\ x^2 + 4x > 1 + x^2 + 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \leq -4 \text{ o } \begin{cases} x \leq -4 \text{ o } x \geq 0 \\ x \geq -1 \\ 2x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -4 \text{ o } \begin{cases} x \geq 0 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \leq -4 \text{ o } x > \frac{1}{2} \quad S =]-\infty, -4] \cup]\frac{1}{2}, +\infty[$$

ES.5) $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 16 = 0$ $(x+2)^2 - 4 + (y-4)^2 = 0$

Sol. ^{ue} - 5 -

$(x+2)^2 + (y-4)^2 = 4$ CIRCONFERENZA di $C(-2, 4)$ e $R=2$

$(x+2)^2 + 4(y-2)^2 = 4$ $\frac{(x+2)^2}{4} + (y-2)^2 = 1$

ELLISSE di $C(-2, 2)$ e semiasse $a=2, b=1$

(MAT) $\begin{cases} (x+2)^2 + (y-4)^2 = 4 \\ (x+2)^2 + 4(y-2)^2 = 4 \end{cases}$ $1^a - 2^a \begin{cases} (y-4)^2 - 4(y-2)^2 = 0 \\ \dots \end{cases}$

$y^2 - 8y + 16 - 4(y^2 - 4y + 4) = 0$ $-3y^2 + 8y = 0$ $3y^2 - 8y = 0$

$y=0$ o $y=\frac{8}{3}$

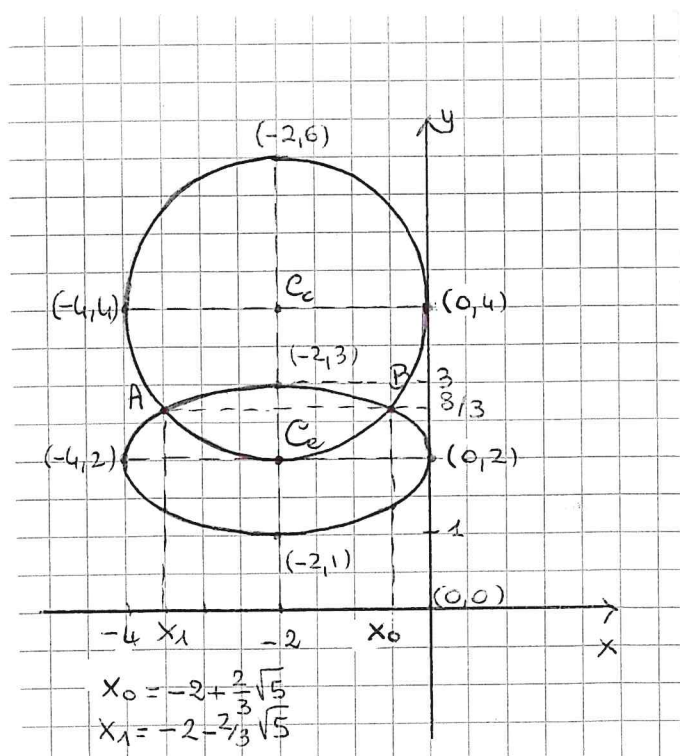
Tornando nella 1^a eq.^{ue} se $y=0$ otteniamo $(x+2)^2 = -12$
IMPOSSIBILE

(la circonferenza non ha punti con $y=0$)

mentre se $y=\frac{8}{3}$ otteniamo $(x+2)^2 = 4 - (\frac{8}{3}-4)^2 = 4 - (-\frac{4}{3})^2 = 4 - \frac{16}{9} = \frac{20}{9}$

da cui $x = -2 \pm \sqrt{\frac{20}{9}} = -2 \pm \frac{2}{3}\sqrt{5}$ $\begin{cases} x_1 = -2 - \frac{2}{3}\sqrt{5} \approx -3,5 \\ x_2 = -2 + \frac{2}{3}\sqrt{5} \approx -0,5 \end{cases}$

$A = (-2 - \frac{2}{3}\sqrt{5}, \frac{8}{3})$ $B = (-2 + \frac{2}{3}\sqrt{5}, \frac{8}{3})$.



ES6) (FIS)

$\frac{1}{2} \leq |x-1| \leq 3$

$\Leftrightarrow$

$-3 \leq x-1 \leq -\frac{1}{2}$

o

$\frac{1}{2} \leq x-1 \leq 3$

$\Leftrightarrow$

$-2 \leq x \leq \frac{1}{2}$ o $\frac{3}{2} \leq x \leq 4$

$S = [-2, \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2}, 4]$

h) $f(x) = e^{x-2}$ $\text{dom} f = \mathbb{R}$ eq.^{ue} del grafico $y = e^{x-2}$ Sol.^{ue} - 6 -

si tratta del grafico della funzione esponenziale $f(x) = e^x$ spostato a destra di 2.

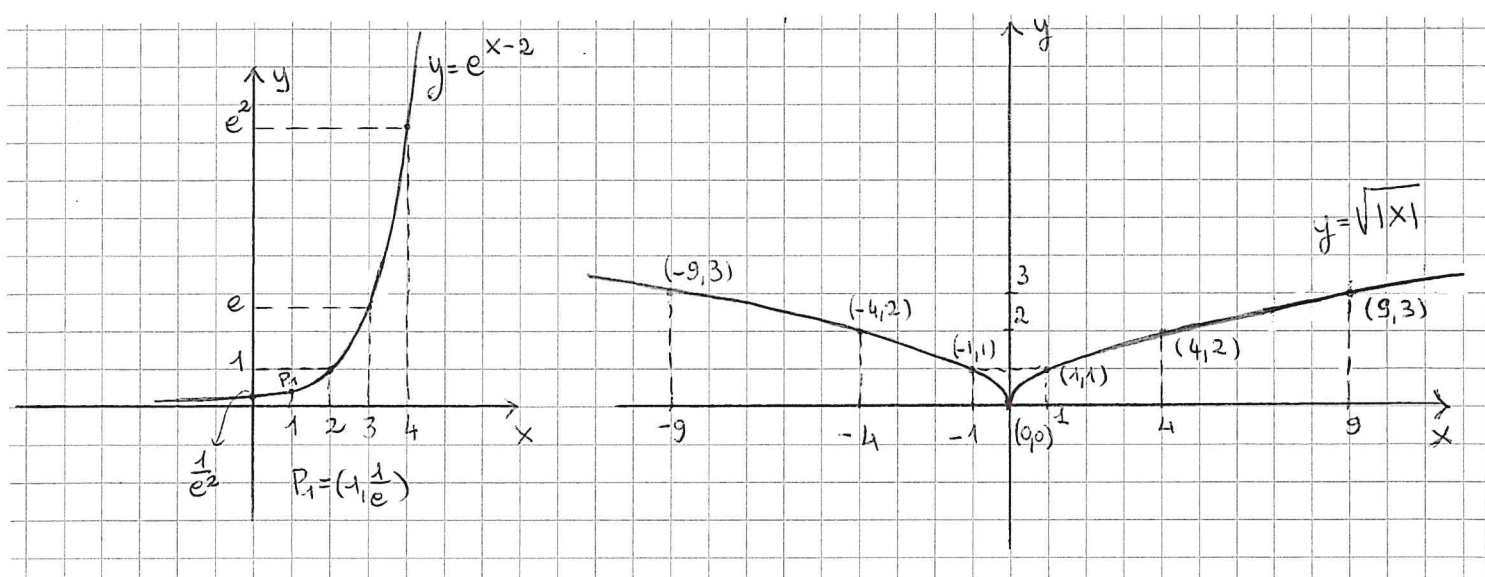
ASINTOTI: $y = 0$ orizzontale $\cap \text{axe } x \neq$ $\cap \text{axe } y (0, \frac{1}{e^2}) \approx 0,14$

PUNTI: $(0, \frac{1}{e^2})$ $(1, \frac{1}{e})$ $(2, 1)$ $(3, e)$ $(4, e^2)$
 $\approx 0,37$ $\approx 2,7$ $\approx 7,4$

$g(x) = \sqrt{|x|}$ $\text{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 0\} = \mathbb{R}$ perché $|x| \geq 0 \forall x$
 eq.^{ue} del grafico $y = \sqrt{|x|}$ si tratta del grafico di $f(x) = \sqrt{x}$ della
 funzione radice di cui si considera $f(|x|) = g(x)$: cioè la parte
 di grafico per $x \geq 0$ rimane $y = \sqrt{x}$ mentre la parte di grafico
 per $x < 0$ è $y = \sqrt{-x}$ cioè il simmetrico rispetto all'axe y
 del grafico per $x \geq 0$.

ASINTOTI: nessuno $\cap \text{axe } x: (0,0)$ $\cap \text{axe } y: (0,0)$

PUNTI $(0,0)$ $(\pm 1,1)$ $(\pm 4,2)$ $(\pm 9,3)$



ES.3) 1ª parte $y = \sqrt{|x|} - 3$ è lo stesso grafico disegnato al punto b) abbassato di 3 e considerato solo per $-9 \leq x \leq 0$. Nessun asintoto, Name y (0, -3), Name x (-9, 0)

Sol. ne 7.

PUNTI : (0, -3) (-1, -2) (-4, -1) (-9, 0).

2ª parte $y = |e^{x-2} - 1|$ si parte dal grafico $y = e^{x-2}$ disegnato al punto b) : poi va abbassato di 1 $y = e^{x-2} - 1$ (Name x (2, 0)) e infine si deve considerare il |·| cioè lasciare invariata la parte di grafico con $y \geq 0$ (al di sopra dell'axe x) e simmetrizzare rispetto all'axe x la parte di grafico con $y < 0$. Da considerare solo $x > 0$

Nessun asintoto, Name y ϕ , Name x (2, 0)

PUNTI : $(0, 1 - \frac{1}{e^2})$, $(1, 1 - \frac{1}{e})$, (2, 0), $(3, e-1)$, $(4, e^2-1)$.
 $\approx 0,86$ $\approx 0,63$ $\approx 1,7$ $\approx 6,4$

