

INSIEMI NUMERICI

NUMERI NATURALI $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

NUMERI INTERI $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, \dots\}$

NUMERI RAZIONALI $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$

NUMERI REALI $\mathbb{R}$ contiene tutti i numeri razionali e anche tutti i numeri IRRAZIONALI (come $\sqrt{2}, \pi, e \dots$)
 $\pi = 3,14159\dots$ $e = 2,71828\dots$
 $\sqrt{2} = 1,41421\dots$ $\sqrt{3} = 1,73205\dots$

ORDINAMENTO di NUMERI

Per mettere nell'ordine giusto due numeri qualsiasi è sufficiente impostare una disequaglianza tra i due numeri e poi controllare se è vera o falsa.

ES. $\frac{25}{6}$ e $\frac{33}{8}$ Pongo $\frac{25}{6} > \frac{33}{8}$ (da verificare)

1° modo scrivo i due numeri con lo stesso denominatore m.c.m.(6,8)=24

$$\frac{25}{6} = \frac{100}{24} > \frac{33}{8} = \frac{99}{24} \quad \text{quindi è vera, da cui} \quad \boxed{\frac{25}{6} > \frac{33}{8}}$$

2° modo moltiplico in croce $\frac{25}{6} > \frac{33}{8}$ equivale $25 \cdot 8 > 33 \cdot 6$ cioè $200 > 198$
 VERO

3° modo passo ai numeri decimali (eseguendo la divisione)

$$\frac{25}{6} = 4,1\bar{6} \quad \frac{33}{8} = 4,125 \quad \text{è il metodo più lungo.}$$

ES. $-\frac{23}{5}$ e $-\frac{37}{8}$ Pongo $-\frac{23}{5} < -\frac{37}{8}$ (da verificare)

cambio segno $\frac{23}{5} > \frac{37}{8}$ e procedo come prima: ad es.

$$23 \cdot 8 > 37 \cdot 5 \quad 184 > 185 \quad \text{Falso} \Rightarrow$$

$$\boxed{-\frac{37}{8} < -\frac{23}{5}}$$

IL NUMERO ZERO 0

$$a+0=a \quad a \cdot 0=0 \quad \frac{0}{a}=0 \quad (a \neq 0) \quad \frac{a}{0}=\text{IMPOSSIBILE}$$

Si dice reciproco di a quel numero c : $a \cdot c = 1$

Tutti i numeri $a \neq 0$ hanno il $\text{RECIPROCO} = \frac{1}{a}$ -

NON ESISTE IL RECIPROCO di 0 -

INSIEMI

Sia A un insieme : $x \in A$, $x \notin A$ -
 APPARTIENE NON APPARTIENE

Dati due insiemi A, B :

$A \cup B$ UNIONE tutti gli elementi sia di A sia di B
 di A e B

$A \cap B$ INTERSEZIONE tutti gli elementi comuni ad A e B
 di A e B

A^c COMPLEMENTARE tutti gli elementi che $\notin A$
 di A

$A \setminus B$ DIFFERENZA tra A e B tutti gli elementi di A che $\notin B$

(oss. se $A \subset \mathbb{R}$, allora $A^c = \mathbb{R} \setminus A$)

Si dice che **$A \subseteq B$** (A è CONTENUTO in B) se tutti gli elementi di A sono anche elementi di B .

INTERVALLI

Un insieme $I \subset \mathbb{R}$ si dice INTERVALLO se è "PRIVO di BUCHI"

($\rightarrow$ corso di Analisi Mat. 1 per la definizione precisa).

Gli intervalli sono tutti e soli gli insiemi del tipo :

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ intervallo CHIUSO

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ intervallo APERTO

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ intervalli SEMIAPERTI
 $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

intervalli NON LIMITATI:

$] -\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ CHIUSI

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$

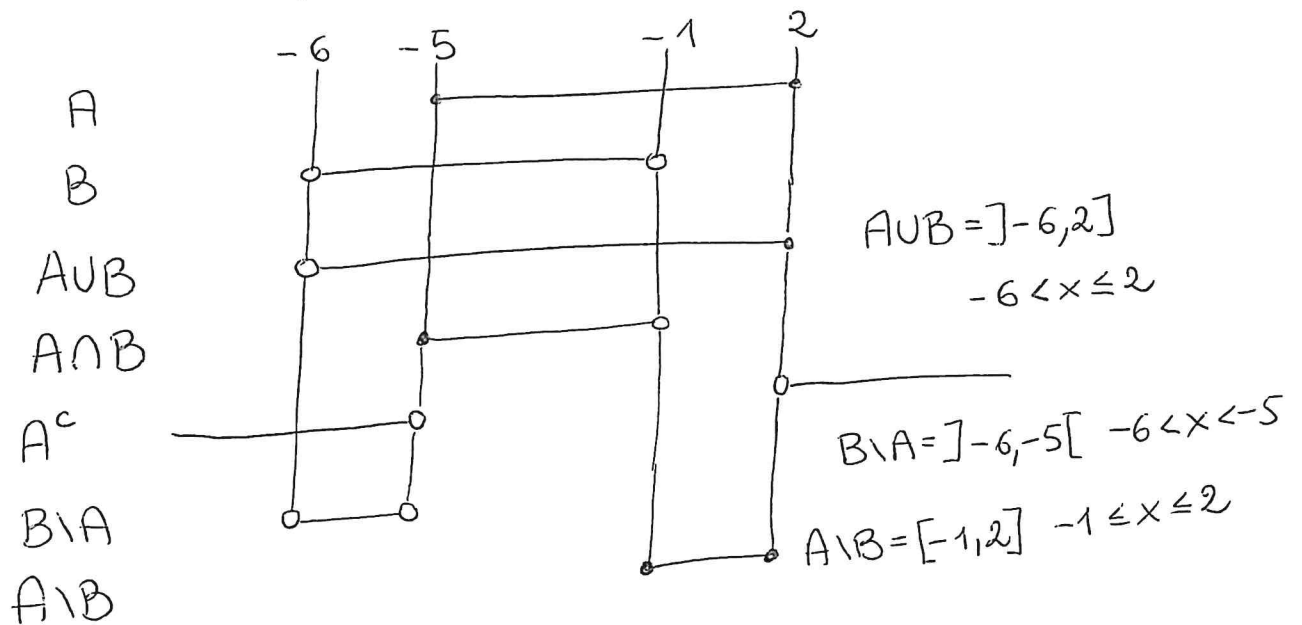
$] -\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ APERTI

es. $A = [-5, 2] = \{x \in \mathbb{R} : -5 \leq x \leq 2\}$

$B =]-6, -1[= \{x \in \mathbb{R} : -6 < x < -1\}$

Determinate $A \cup B, A \cap B, A^c, B \setminus A, A \setminus B$



$$A \cap B = [-5, -1[\quad -5 \leq x < -1$$

$$A^c =]-\infty, -5[\cup]2, +\infty[\\ \{x \in \mathbb{R} : x < -5\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$$

Per tradurre le "FRASI" in MATEMATICA

PRELIMINARI - 4 -

servono dei simboli con un significato preciso.

Ogni "FRASE" si chiama PROPOSIZIONE e si indica con una lettera maiuscola corsiva: es. A, B, P, Q ecc.

§ CONNETTIVI LOGICI servono per legare insieme due (o più) proposizioni e formarne una terza:

E ($\wedge$) CONGIUNZIONE $A \text{ E } B \quad (A \wedge B)$

questa proposizione è VERA solo se entrambe le proposizioni che la costituiscono sono VERE.

OSS. In un elenco la VIRGOLA significa E

es. $2 > 1 \text{ E } 2 < 3 \text{ è VERA}$

$2 > 1 \text{ E } 2 > 3 \text{ è FALSA}$

O ($\vee$) DISGIUNZIONE (non esclusiva) $A \text{ O } B \quad (A \vee B)$

questa proposizione è VERA solo se ALMENO UNA delle due proposizioni che la costituiscono è VERA

es. $2 > 1 \text{ O } 2 > 3 \text{ è VERA}$ (la 1^a delle due è VERA)

$2 > 1 \text{ O } 2 < 3 \text{ è VERA}$ IMPORTANTE possono anche essere VERE ENTRAMBE, non si escludono a vicenda

$2 > 3 \text{ O } 2 > 4 \text{ è FALSA}$: questa proposizione è falsa solo se entrambe le proposizioni sono false.

OSS.

$a \leq b$ SIGNIFICA $a < b \text{ O } a = b$
($a \geq b$ " $a > b \text{ O } a = b$)

Quindi $2 \leq 3$ VERA, $2 \leq 2$ è VERA, $2 < 2$ è FALSA.

NON (7) NEGAZIONE $\neg$ (7A)

questa proposizione ~~afferma~~ il contrario di quella a cui si applica.

es. $\neg$ (16 $\overset{\text{FALSA}}{\text{è divisibile per 2}}$) $\overset{\text{VERA}}{\text{è "16 non è divisibile per 2"}}$ $\overset{\text{FALSA}}{\text{}}$

Quindi è FALSA se la proposizione di partenza è vera e viceversa

es. $\neg$ (3 > 4) (che è VERA in quanto 3 > 4 è falsa)

si traduce in $3 \leq 4$ che infatti è vera.

$\Rightarrow$ IMPLICA $A \Rightarrow B$ IPOTESI $\Rightarrow$ TESI

vuol dire che da una proposizione ne segue un'altra

es. $\odot a > 2 \Rightarrow a > 1$ è VERA

$\odot a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ è VERA

$\odot a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$ è FALSA

IMPORTANTE In $\odot$ potrebbe essere $a = 3 > 2$ (quindi l'ipotesi è VERA)

ed è $a = 3 > 1$ (quindi la tesi è vera), ma potrebbe anche essere

$a = \frac{3}{2} < 2$ (quindi l'ipotesi è falsa e non si può dedurre nulla)

ma la tesi $a = \frac{3}{2} > 1$ è ugualmente vera, oppure ancora

potremmo considerare $a = \frac{1}{2} < 2$ (ipotesi falsa) e tesi $a = \frac{1}{2} > 1$

anch'essa falsa. Se l'ipotesi è falsa non ne possiamo DEDURRE

la tesi che potrebbe essere VERA o FALSA a seconda dei casi,

ma questo non modifica il fatto che $A \Rightarrow B$ sia VERA.

La proposizione $A \Rightarrow B$ è FALSA solo quando A è VERA

da essa NON SEGUE B , quindi solo possiamo produrre un caso in cui A sia VERA ma B risulti FALSA.

Quindi

A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
$A \Rightarrow B$	V	F	V	V

Ma $\odot$ potremmo avere $2 \neq -2$ ma $2^2 = (-2)^2$, oppure $3 \neq 2$ e $3^2 \neq 2^2$, ma non cambia il fatto se $a=b$ necessariamente $a^2=b^2$ cioè il fatto che $\odot$ sia vera.
 Invece $\odot$ è falsa perché poniamo considerate $a=2$ $b=-2$ ed avere $a^2=b^2$ con $a \neq b$, quindi da $a^2=b^2$ non segue quanto detto.

$\Leftrightarrow$ BIIMPLICA (SONO EQUIVALENTI) $A \Leftrightarrow B$

Significa che dalla 1^a proposizione segue la seconda e viceversa

$A \Leftrightarrow B$ significa $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

quindi questa proposizione è VERA solo se le due proposizioni sono ENTRAMBE VERE oppure ENTRAMBE FALSE

es. $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a=0 \text{ o } b=0$ Legge di annullamento del prodotto

QUANTIFICATORI

Sono simboli che si utilizzano per scrivere delle proposizioni:

- $\forall$ che significa QUALUNQUE, PER OGNI
- $\exists$ che significa ESISTE ALMENO (un, uno, una)
- $\exists!$ che significa ESISTE UNICO
- $\nexists$ che significa NON ESISTE

es. $\forall a \in \mathbb{R} : \overset{\text{TALE CHE}}{a+0=a} \quad \text{VERA}$

$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0 \quad \text{VERA}$

$\exists! x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0 \quad \text{FALSA}$

$\forall a \in \mathbb{R} \exists c \in \mathbb{R} : a \cdot c = 1 \quad \text{FALSA per } a=0$

$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists c \in \mathbb{R} : a \cdot c = 1 \quad \text{VERA} \quad (c = \frac{1}{a} = \text{RECIPROCO di } a)$

$\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : y > x \quad \text{VERA (è il principio di NON LIMITATEZZA dei NUMERI REALI)}$

$\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} y > x \quad \text{FALSA}$

$\downarrow$
 $y = x+1$

OSS. Cambiando l'ordine dei quantificatori il significato in generale cambia.

$\nexists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0 \quad \text{VERA}$

$\nexists x \in \mathbb{C} : x^2 + 1 = 0 \quad \text{FALSA}$
NUMERI
COMPLESSI

PROPRIETA' DELLE UGUAGLIANZE

$a=b \Rightarrow a+c=b+c \quad \forall c \in \mathbb{R}$

$a+c=b+c \Rightarrow a+c+(-c)=b+c+(-c) \Rightarrow a=b$

Quindi $\boxed{a=b \Leftrightarrow a+c=b+c \quad \forall c \in \mathbb{R}}$

$a=b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad (\text{anche } c=0 \text{ si ottiene } 0=0)$

$a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a \cdot c \cdot \frac{1}{c} = b \cdot c \cdot \frac{1}{c} \Rightarrow a=b$
se $c \neq 0$
 $\exists \frac{1}{c}$ RECIPROCO di c

Quindi $\boxed{a=b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c \quad \forall c \neq 0} \quad (o \quad \forall c \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

- 8 -

e poi $\frac{x^2-1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{E} \quad \underline{x^2-1=0}$

PROPRIETÀ delle DISEGUAGLIANZE

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$a + c < b + c \Rightarrow a + c + (-c) < b + c + (-c) \Rightarrow a < b$$

Quindi

$$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$a < b \Leftrightarrow -a > -b$$

es. $2 < 4 \quad -4 < -2 \quad -3 < -1 \quad 1 < 3$
 $-4 < 3 \quad -3 < 4$

DIM. $a < b \Leftrightarrow b > a \Leftrightarrow b + (-b) > a - b$
 $+(-b)$

$$\Leftrightarrow 0 > a - b \Leftrightarrow -a > a - b + (-a) \Leftrightarrow -a > -b$$

$+(-a)$

$$a < b \Rightarrow ca < cb \quad \forall c > 0 \quad (c = 0 \text{ No } 0 < 0 \text{ falso})$$

$c < 0 \text{ No si inverte)}$

$$c > 0 \Rightarrow ca < cb \Rightarrow c \cdot a \cdot \frac{1}{c} < c \cdot b \cdot \frac{1}{c} \Rightarrow a < b$$

$\cdot \frac{1}{c}$

Quindi

$$a < b \Leftrightarrow ca < cb \quad \forall c > 0$$

$$a < b \Leftrightarrow ca > cb \quad \forall c < 0$$

OSS. Mai multipli-
 care per un numero
 di cui non si conosce
 il SEGNO!

DIS. di 1° grado

es. $4x + 4 < 7x \Leftrightarrow 7x > 4x + 4 \Leftrightarrow 7x - 4x > 4$
 $-4x$

$$\Leftrightarrow 3x > 4 \Leftrightarrow x > \frac{4}{3}$$

$\cdot \frac{1}{3}$

PASSAGGIO AL RECIPROCO

es. $2 < 3 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

$$-3 < -2 \Rightarrow -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$$

$$-2 < 3 \Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$$

quindi

$$0 < a < b \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

$$b < a < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$$

$$a < 0 < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$$

mai passare al reciproco se non
si conosce il segno!

ELEVAMENTO al QUADRATO

es. $2 < 3 \Rightarrow 2^2 < 3^2$ $-3 < -2 \Rightarrow (-2)^2 < (-3)^2$

$-3 < 2 \Rightarrow 2^2 < (-3)^2$ $-2 < 3 \Rightarrow (-2)^2 < 3^2$

$$0 < a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$$

$$b < a < 0 \Leftrightarrow a^2 < b^2$$

OSS. IMP. Mai elevare al quadrato senza conoscere il SEGNO!!

VALORE ASSOLUTO di un numero

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

es. $|2| = 2$ $|0| = 0$ $|-3| = 3$

OSS. $|-a|$ non è in generale $= a$

$$|-a| = a \text{ solo se } a \geq 0 \\ \text{se } a < 0 \quad |-a| = -a.$$

RADICE di un NUMERO REALE

$a \in \mathbb{R}$

$\sqrt{a}$

1) È definita solo se $a \geq 0$

2) $\sqrt{a} \geq 0 \quad \forall a \geq 0$

3) $\sqrt{a}$ è quel numero ≥ 0 il cui quadrato è a

es. $\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{-4} = \text{NON ESISTE}$ $\sqrt{0} = 0$

OSSERVIAMO che $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$ quindi NON si possono

Semplificare le potenze con le radici

Vale

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Calcoli con le radici

$$\sqrt{2} \approx 1,414 \quad \sqrt{3} \approx 1,732 \quad \sqrt{5} \approx 2,236$$

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{32} = \sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 4 \cdot 2 = 8$$

$$3 \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{5}} + 2\sqrt{7} = 3 \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{5}} + 2\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$$

$$(\sqrt{3})^{-1} \cdot \sqrt{27} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 3\sqrt{3} = 3$$

$5\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$ non si può fare nulla

$\sqrt{100-64} = \sqrt{36} = 6$ (e non $= 10-8=2!!$)

$$\text{se } a \geq 0, b \geq 0$$

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

altrimenti (se $a \leq 0, b \leq 0$)

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}$$

$$a > 0 \quad \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$a \geq 0 \quad (\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$

$$a \geq 0 \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$b \geq 0 \quad \sqrt{a^2 \cdot b} = |a| \cdot \sqrt{b}$$

NON ESISTONO PROPRIETÀ
SU SOMMA e DIFFERENZA!

$$\sqrt{3^2+4^2} \neq 3+4 \quad ||$$

$$\sqrt{10^2-6^2} \neq 10-6 \quad ||$$

Ordinare numeri contenenti radici

PRELIMINARI

-12-

$$\boxed{\sqrt{38} \quad \frac{19}{3}} \quad \text{Pongo } \sqrt{38} < \frac{19}{3} \text{ (da verificare)}$$

poiché $(\sqrt{38} > 0, \frac{19}{3} > 0)$ e $0 < a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

$$\sqrt{38} < \frac{19}{3} \Leftrightarrow 38 < \frac{361}{9} \Leftrightarrow 38 \cdot 9 < 361 \Leftrightarrow 342 < 361 \text{ VERO}$$

Quindi $\boxed{\sqrt{38} < \frac{19}{3}}$

$$\boxed{-\sqrt{7} \quad -\frac{13}{5}} \quad \text{Pongo } -\sqrt{7} > -\frac{13}{5} \text{ (da verificare), cambio segno } \sqrt{7} < \frac{13}{5}$$

per le stesse ragioni di prima $\sqrt{7} < \frac{13}{5} \Leftrightarrow 7 < \frac{169}{25} \Leftrightarrow 7 \cdot 25 < 169$

$$\Leftrightarrow 175 < 169 \text{ Falso, quindi } \boxed{-\sqrt{7} < -\frac{13}{5}}$$

$$\boxed{\sqrt{5}-\sqrt{3} \quad \frac{1}{2}} \quad \text{Pongo } \sqrt{5}-\sqrt{3} < \frac{1}{2} \text{ (da verificare)}$$

$$\sqrt{5}-\sqrt{3} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{5} < \sqrt{3} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{5} < 2\sqrt{3} + 1 \Leftrightarrow 4 \cdot 5 < 4 \cdot 3 + 1 + 4\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{3} > 7 \Leftrightarrow 16 \cdot 3 > 49$$

di nuovo
possiamo $(\cdot)^2$

Sono
entrambi > 0
quindi $(\cdot)^2$

$$\Leftrightarrow 48 > 49 \text{ Falso, quindi } \boxed{\sqrt{5}-\sqrt{3} > \frac{1}{2}} \text{ (anche se di pochissimo...)}$$