SCHEDA N.9 - SOLUZIONE

1) i) non è una funzione su $[0,2]$ perchè $\forall x \in [1,2[$ x ha 2 immagini (la retta verticale interseca il grafico in due punti)

ii) è una funzione su $[0,2]$ perchè ogni retta verticale per $x \in [0,2]$ interseca il grafico in uno ed un solo punto
$\operatorname{Im} f = [-\frac{1}{2}, 2]$ e f non è iniettiva perchè i valori $y \in]-\frac{1}{2}, 0]$ sono assunti 2 volte (una per $x \in [0, \frac{1}{2}[$ e una per $x \in]\frac{1}{2}, 1]$) o, detto in altro modo, perchè la retta orizzontale $y = \text{cost}$ con $\text{cost} \in]-\frac{1}{2}, 0]$ interseca il grafico in 2 punti. Basta anche osservare che $f^{-1}(0) = \{0, 1\}$, 2 controimmagini.

iii) non è una funzione su $[0,2]$ perchè i valori di $x \in]0,1[$ sono privi di immagine

iv) non è una funzione su $[0,2]$ perchè ogni valore di $x \in [0,2[$ ha due immagini, oppure perchè ogni retta verticale per $x \in [0,2[$ interseca il grafico in due punti.

v) è una funzione su $[0,2]$ perchè ogni retta verticale per $x \in [0,2]$ interseca il grafico in un solo punto: in particolare $f(1) = 1$.
$\operatorname{Im} f = [0,1] \cup]2,3]$ e f è iniettiva perchè ogni $y \in \operatorname{Im} f$ è immagine di 1 solo x (oppure ogni retta orizzontale $y = \text{cost}$ interseca il grafico al più in un punto)

vi) non è una funzione su $[0,2]$ perchè $x = 1$ ha 2 immagini (la retta verticale $x = 1$ interseca il grafico in due punti)

vii) è una funzione perchè ogni retta verticale per $x \in [0,2]$ interseca il grafico in un solo punto (in particolare $f(0) = 2$) -
$\operatorname{Im} f = [1, +\infty[$ e f non è iniettiva perchè $y = 2$ è immagine di 2 punti distinti (la retta $y = 2$ interseca il grafico in due punti) - cioè $f^{-1}(2)$ contiene 2 elementi.

ES. 2) a) $\mathrm{dom}f = \mathbb{R}$ b) $\mathrm{dom}f =]-\infty, 2] \cup]3, +\infty[$

c) $\mathrm{dom}f =]-\infty, 0[\cup]0, 2[\cup]2, +\infty[$ d) $\mathrm{dom}f =]-1, 3]$

a) $\mathrm{dom}f = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}f =]-\infty, 3]$ b) $\mathrm{dom}f = [-4, +\infty[$, $\mathrm{Im}f =]-\infty, 7]$

c) $\mathrm{dom}f =]-\infty, -5[\cup]-5, +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{-5\}$, $\mathrm{Im}f = [-4, +\infty[$

d) $\mathrm{dom}f =]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $\mathrm{Im}f = \mathbb{R}$

ES.3) $\mathrm{dom}f = [1, 7]$, $\mathrm{Im}f = [-2, 4]$, $f(1) = 3$, $f(5) = -1$, $f^{-1}(4) = \{2\}$

ES.4) $\mathrm{dom}f = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}f =]-\infty, 2]$, $f(3) = 2$, $f^{-1}(-1) = \{-1, 2, 6\}$

ES.5) $\mathrm{dom}f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\mathrm{Im}f =]-\infty, 1]$, $f(-1) = 1$

$f^{-1}(-1) = \{-3, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}\}$

ES.6) $\mathrm{dom}f =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $\mathrm{Im}f = \mathbb{R}$, $f(0) = 0$,

$f(-1) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) =$ NON ESISTE ($2 \notin \mathrm{dom}f$)

Ci sono 2 controimmagini in $f^{-1}(y)$ per $y \in]-\infty, 0[\cup \{1\}$ cioè se $y = k < 0$ la retta orizzontale $y = k$ interseca il grafico 2 volte e la retta $y = 1$ interseca il grafico due volte.

ES.7) $\mathrm{dom}f = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}f =]-\infty, 1] = \{y \in \mathbb{R} : y \leq 1\}$, $f(0) = 0$, $f^{-1}(0) = \{0, 2\}$

$f(-\frac{1}{2}) < 0$

ES.8) $\mathrm{dom}f = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}f =]-\infty, 2]$, $f^{-1}(y)$ contiene un solo elemento per $y \in]-\infty, 1] \cup \{2\}$, cioè $y = k$ interseca il grafico 1 sola volta se $k \leq 1$ e se $k = 2$.

ES 9) <u>1° grafico</u>: a. $\mathrm{dom}f = \mathbb{R}$, b. $\mathrm{Im}f = \{-1\} \cup [2, +\infty[$

c) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ x+2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ cioè eq.ne del grafico $y = -1$ per $x < 0$, $y = x + 2$ per $x \geq 0$

$y = x + 2$ la retta per $(0,2)$ e $(1,3)$ ha $m = 1$ e $q = 2$

$f(-4) = -1$ $f(0) = 2$ $f(3) \underset{3 \geq 0}{=} 3 + 2 = 5$

$f(\frac{1}{2}) \underset{\frac{1}{2} \geq 0}{=} \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

2° grafico a. $dom f = \mathbb{R}$, $Im f =]-\infty, 1] \cup]2, +\infty[$

b. $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \leq 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$ parabola con VE asse y $y = ax^2 + c$

$c = 1 \Rightarrow y = ax^2 + 1$ passa per $(\pm 1, 0)$

$\Rightarrow 0 = a + 1 \Rightarrow a = -1$

$y = -x^2 + 1$

retta per $(1,2)$ e $(2,4)$

ha $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$

$y = 2 + 2(x-1)$ $y = 2x$

eq.ne del GRAFICO $\begin{cases} y = -x^2 + 1 & x \leq 1 \\ y = 2x & x > 1 \end{cases}$

c. $f(1) = 0$, $f(2) = 4$, $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$, $\underset{-2 \leq 1}{f(-2)} = -(-2)^2 + 1 = -3$

$\underset{3>1}{f(3)} = 2 \cdot 3 = 6$

d. f non è iniettiva perchè la retta $y = k$ con $k \in [0, 1[$ interseca il grafico due volte, oppure perchè ad esempio $f^{-1}(0) = \{-1, 1\}$.

ES. 10) a) $dom f = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, $Im f = \mathbb{R} \Rightarrow f$ è SURIETTIVA, $f(1) = 0$, $f^{-1}(0) = \{-2, 1, 3\}$, $f^{-1}(2)$ contiene due elementi: $f^{-1}(2) = \{x_1, x_2\}$ con $x_1 < -2$ (non si vede molto ma la funzione continua a salire, anche se lentamente per x che diventa sempre più negativo, e $x_2 > 3$.

b) $dom f =]-6, 0[\cup]0, +\infty[$, $Im f = [-2, +\infty[\Rightarrow f$ NON è suriettiva, $f(1) > 0$, $f^{-1}(0) = \{-4, -1\}$, le controimmagini di 2 sono 3 $f^{-1}(2) = \{x_1, x_2, x_3\}$ con $x_1 \in]-6, -4[$, $x_2 \in]-1, 0[$, $x_3 > 0$.

c) $dom f = [-2, +\infty[$, $Im f =]-\infty, 2] \Rightarrow f$ NON è SURIETTIVA, $f(1) < 0$, $f^{-1}(0) = \{-2, 0, 2, 3\}$, $f^{-1}(2) = \{-1\}$.

d) $dom f = \mathbb{R}$, $Im f =]-\infty, 2] \Rightarrow f$ NON è suriettiva, $f(1) > 0$, $f^{-1}(0) = \{-3, 3\}$
$f^{-1}(2) = \{\frac{1}{2}\}$

e) $\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, $\mathfrak{I}m f = \mathbb{R}$
$\Rightarrow f$ è SURIETTIVA, $f(1) = 0$, $f^{-1}(0) = \{1, 3, 4\}$, $f^{-1}(2)$ contiene due elementi $f^{-1}(2) = \{x_1, x_2\}$ con $x_1 < 0$ e $x_2 > 4$.

g) $\text{dom} f =]-2, 4[$, $\mathfrak{I}m f =]-\infty, 1] \cup \{2\} \Rightarrow f$ NON è suriettiva, $f(1) = 2 > 0$, $f^{-1}(0) = \{2, 3\}$, $f^{-1}(2)$ contiene infiniti elementi, precisamente $f^{-1}(2) =]-2, 1]$ perchè $\forall x \in]-2, 1]$ si ha $f(x) = 2$.

ES. 11) a) $\text{dom} f = [-4, 4]$, $\mathfrak{I}m f =]-4, 4]$, f non è iniettiva perchè la retta $y = -3$ interseca il grafico in due punti o, che è lo stesso, perchè $f^{-1}(-3) = \{\frac{7}{2}, 4\}$ 2 elementi.

$f(0) = 1$, $f(2) = 0$, $f(4) = -3$, $f(-3) =$ serve conoscere l'eq.ne della retta per $(0,1)$ e $(-4,4)$: $m = -\frac{3}{4}$, $y = -\frac{3}{4}x + 1$ quindi
$f(-3) = -\frac{3}{4}(-3) + 1 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$

$f^{-1}(4) = \{-4\}$ $f^{-1}(-3) = \{\frac{7}{2}, 4\}$ $f^{-1}(1) = \{0\}$ $f^{-1}(2)$: cerchiamo x tale che in $y = -\frac{3}{4}x + 1$ si abbia $y = 2$ $2 = -\frac{3}{4}x + 1$ $\frac{3}{4}x = -1$
$f^{-1}(2) = \{-\frac{4}{3}\}$.

b) $\text{dom} f =]-\infty, 6[$, $\mathfrak{I}m f =]-2, +\infty[$, f non è iniettiva perchè la retta $y = k$ con $k \in [-1, 1]$ interseca il grafico in più punti, oppure perchè $f^{-1}(0) = \{-3, 0, 4\}$ o anche $f^{-1}(-1) = \{-4, 2\}$ ecc.
$f(0) = 0$, $f(6)$ NON ESISTE ($6 \notin \text{dom} f$), $f^{-1}(0) = \{-3, 0, 4\}$, $f^{-1}(1) = \{-\frac{3}{2}, \frac{14}{3}\}$
$f^{-1}(-1) = \{-4, 2\}$ $f^{-1}(-2) = \phi$: non ci sono $x : f(x) = -2$.

c) $\text{dom} f = [-4, 2] \cup]4, 7]$, $\mathfrak{I}m f = [-3, -1] \cup]1, 3] \cup [4, 5[$
f è INIETTIVA perchè ogni retta orizzontale interseca il grafico al massimo 1 volta.

$f(-1)=-1$ $f(0)=\frac{5}{2}$ $f(4)$ NON ESISTE ($4 \notin \mathrm{dom} f$)

$f^{-1}(4)=\{7\}$ $f^{-1}(3)=\{2\}$ $f^{-1}(2)=\{-\frac{1}{2}\}$ $f^{-1}(-\frac{5}{3})=$ serve l'eq.^{ne} della retta per $(-4,-3)$ e $(-1,-1)$: $m=\frac{2}{3}$ $y=-1+\frac{2}{3}(x+1)$

$y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $f^{-1}(-\frac{5}{3})$ è la x: $\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}=-\frac{5}{3}$ $\frac{2}{\cancel{3}}x=-\frac{4}{\cancel{3}}$ $x=-2$

$f^{-1}(-\frac{5}{3})=\{-2\}$.

d) $\mathrm{dom} f =]-\infty,-3[\cup]-3,0]$, $\mathrm{Im} f =]-\infty,-1]$, f non è INIETTIVA perchè la retta $y=k$ per $k \in [-3,-1[$ interseca il grafico in più di un punto oppure perchè ad esempio $f^{-1}(-2)=\{-\frac{8}{3},-1\}$.

$f(0)=-3$, $f(-1)=-2$, $f^{-1}(-2)=\{-\frac{8}{3},-1\}$, $f^{-1}(-1)=\{-2\}$

$f^{-1}(y)$ contiene 3 valori di x per $y \in]-2,-1[$

$f^{-1}(y)=\phi$ se $y \notin \mathrm{Im} f$ cioè se $y>-1$.

e) $\mathrm{dom} f =]-1,2] \cup [4,+\infty[$, $\mathrm{Im} f =]1,4]$, f non è INIETTIVA perchè la retta $y=k$ per $k \in [2,3[\cup \{4\}$ interseca il grafico in più di un punto oppure perchè ad esempio $f^{-1}(2)=\{-\frac{1}{4},2\}$,

$f(0)=\frac{5}{2}$, $f(1)=4$, $f(4)=4$, $f^{-1}(2)=\{-\frac{1}{4},2\}$, $f^{-1}(1)=\phi$ ($1 \notin \mathrm{Im} f$),

$f^{-1}(4)=\{1,4\}$, $f^{-1}(\frac{5}{2})=\{0,\frac{7}{4},5\}$

$f^{-1}(y)$ contiene 3 valori di x per $y \in]2,3[$.