3ª lezione

POLINOMI

Def. Un POLINOMIO è una somma finita di termini (detti monomi) ciascuno dei quali è il prodotto di una costante per una potenza a esponente naturale dell'incognita.
Se ad esempio l'incognita è x, allora il polinomio P(x) è un'espressione del tipo

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

con $m \in \mathbb{N}$. I numeri $a_i \in \mathbb{R}$ $\forall i = 0, \dots, m$ si dicono COEFFICIENTI del polinomio.
a_0 si dice termine noto

Def. Si dice GRADO di un polinomio P(x) l'esponente della più alta potenza di x che compare con coefficiente diverso da 0.

Esempi. $P(x) = -x^5 + 3x^2 - 5$ è un polinomio di grado 5

$P(x) = x^2 - \sqrt{2}x^3 - 1 + 3x^6$ è un polinomio di grado 6

$P(x) = x^2 - \sqrt{x} + 2 = x^2 - x^{1/2} + 2$ non è polinomio

DIVISIONE TRA POLINOMI

La divisione tra due polinomi segue un criterio analogo alla divisione tra numeri naturali.
Ricordiamo che la divisione di N (numero $\in \mathbb{N}$ assegnato) per D (divisore) ha QUOZIENTE Q e RESTO R se

$$N = Q \cdot D + R \quad \text{con} \quad 0 \leq R < D.$$

Es. $N = 21 : D = 5$ ha $Q = 4$ e $R = 1$, cioè $21 : 5$ dà 4 con resto di 1 e infatti $21 = 4 \cdot 5 + 1$ con $1 < 5$.

La divisione di un POLINOMIO $N(x)$ per un polinomio DIVISORE $D(x)$ ha per QUOZIENTE un polinomio $Q(x)$ e RESTO un polinomio $R(x)$ se

$$N(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x) \quad \text{con grado } R(x) < \text{grado } D(x).$$

Def. Se nella divisione del polinomio $N(x)$ per il polinomio $D(x)$ si ha RESTO zero, cioè $R(x)=0$, allora si dice che $N(x)$ è DIVISIBILE ESATTAMENTE per $D(x)$ e $N(x)$ è scomponibile in $N(x) = Q(x) \cdot D(x)$.

Es. $N(x) = 3x^5+6x^4-4x^2-7x-1 \qquad D(x) = x^2+2x$

$$\begin{array}{l|l}
N(x) = 3x^5+6x^4-4x^2-7x-1 & x^2+2x = D(x) \\
\hline
\underline{3x^5+6x^4} & 3x^3-4 = Q(x) \\
\;/\quad /\quad -4x^2-7x-1 & \\
\qquad\quad \underline{-4x^2-8x} & \\
\qquad\quad /\quad x-1 = R(x) &
\end{array}$$

$$3x^5+6x^4-4x^2-7x-1 = (3x^3-4)\cdot(x^2+2x) + (x-1)$$

Def. Sia $P(x)$ un polinomio e $x_0 \in \mathbb{R}$. Si dice che x_0 è una RADICE del polinomio $P(x)$ se $P(x_0)=0$

$$x_0 \text{ è RADICE di } P(x) \Longleftrightarrow P(x_0)=0.$$

OSS 1 Al posto del termine RADICE si usa anche il termine ZERO di un POLINOMIO.

OSS 2 Si dimostra che se un polinomio ha grado n, allora ha al massimo n radici.

$\boxed{\text{REGOLA}}$ Dato un polinomio $P(x)$ a coefficienti interi le eventuali radici razionali sono da ricercare tra i numeri del tipo $\pm\frac{m}{n}$ con m divisore del termine noto (cioè di a_0)

e m divisore del coefficiente del termine di grado massimo. Naturalmente il polinomio può avere delle radici irrazionali.

Si dimostra che

$$\boxed{x_0 \text{ è RADICE di } P(x) \iff P(x) \text{ è DIVISIBILE esattamente per } (x-x_0)}$$

Questa proprietà si usa per decomporre un polinomio in fattori.

Esempio. $P(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x - 10$

Le eventuali radici razionali sono in realtà intere e si trovano tra i divisori di -10 : $\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 5 \quad \pm 10$

$P(1) = -12 \neq 0 \Rightarrow x_0 = 1$ non è radice di $P(x)$

$P(-1) = 0 \Rightarrow \underline{x_0 = -1}$ è RADICE di $P(x) \Rightarrow P(x)$ è divisibile esattamente per $(x+1)$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x - 10 & x+1 \\
\hline
x^4 + x^3 & x^3 - 2x^2 + 5x - 10 \\
\hline
/\ -2x^3 + 3x^2 - 5x - 10 & \\
\quad -2x^3 - 2x^2 & \\
\hline
\quad /\ 5x^2 - 5x - 10 & \\
\quad\quad 5x^2 + 5x & \\
\hline
\quad\quad /\ -10x - 10 & \\
\quad\quad\quad -10x - 10 & \\
\hline
\quad\quad\quad /\ / &
\end{array}
$$

$\Rightarrow x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x - 10 = (x+1)(x^3 - 2x^2 + 5x - 10)$

Per effettuare questa scomposizione si può utilizzare anche la REGOLA di RUFFINI

$$
\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 1 & -1 & 3 & -5 & -10 \\
\hline
 & & -1 & 2 & -5 & 10 \\
x_0 \to -1 & & & & & \\
\hline
 & \underbrace{1 \quad -2 \quad 5 \quad -10}_{\text{coeff. di } Q(x)} & & & & 0
\end{array}
$$

$\leftarrow$ coeff. del polinomio

$0 \leftarrow$ se viene 0 x_0 è radice di $P(x)$

coeff. di $Q(x)$ che risulta $x^3 - 2x^2 + 5x - 10$

Proseguiamo decomponendo ulteriormente il polinomio di 3° grado $Q(x)$. Lo scopo è arrivare a tutti polinomi di grado ≤ 2, visto che siamo già in grado di decomporre i polinomi di grado 2 se è possibile.

$Q(-1) = -18 \neq 0 \Rightarrow x_1 = -1$ non è radice di $Q(x)$

$Q(2) = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ è RADICE di $Q(x) \Rightarrow Q(x)$ è divisibile esattamente per $(x-2)$

Si ottiene $x^3 - 2x^2 + 5x - 10 = (x-2)(x^2+5)$.

In conclusione $P(x) = (x+1)(x-2)(x^2+5)$, non è ulteriormente decomponibile perchè x^2+5 non si decompone ($\Delta < 0$, $x^2+5 \geq 5\ \forall x$), e quindi $P(x)$ ammette $x_0 = -1$ e $x_1 = 2$ come uniche radici reali.

$\boxed{\text{DISEQUAZIONI di grado SUPERIORE al SECONDO}}$

<u>ESEMPIO</u> $25x^3 + 30x^2 - 36x + 8 > 0$

La disequazione si presenta nella forma $P(x) > 0$ con $P(x)$ polinomio di grado 3. E' necessario scomporre il polinomio in fattori di grado ≤ 2 ottenendo una disequazione prodotto che poi sappiamo studiare.

$P(1) = 27 \neq 0 \quad P(-1) = 49 \neq 0 \quad P(2) = 256 \neq 0 \quad P(-2) = 0$

$\Rightarrow x_0 = -2$ è radice di $P(x) \Rightarrow P(x)$ è divisibile esattamente per $(x+2)$

Si ottiene $25x^3 + 30x^2 - 36x + 8 = (x+2)(25x^2 - 20x + 4)$.

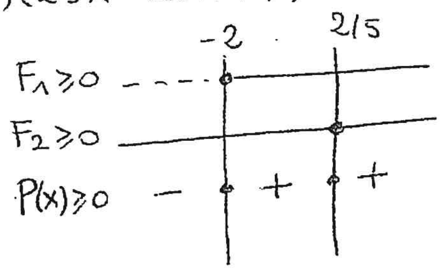
Allora la diseq.ne diventa $(x+2)(25x^2 - 20x + 4) > 0$

$F_1 = x + 2 \geq 0 \quad x \geq -2$

$F_2 = (25x^2 - 20x + 4) = (5x-2)^2 \geq 0 \quad \forall x$

$F_2 = 0$ se $x = \frac{2}{5}$

$25x^2 - 20x + 4 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{0}}{25} = \frac{2}{5}$



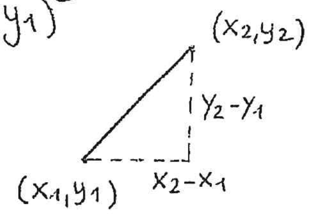
Sol.^{ni} di $P(x)>0$ $\quad x\in\,]-2,\frac{2}{5}[\,\cup\,]\frac{2}{5},+\infty[$

RETTE

distanza tra due numeri reali $\quad dist(x_1,x_2)=|x_1-x_2|$

distanza in $\mathbb{R}^2$ $\quad dist((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

(per il Teorema di Pitagora)



Eq.^{ne} generale di una retta

$\boxed{ax+by+c=0}$ con a,b non contemporaneamente nulli

Si ottengono tutte le rette del piano sia orizzontali $(a=0)$, verticali $(b=0)$ o oblique $(a\cdot b\neq 0)$.

Rette orizzontali $\boxed{y=\text{costante}}$ $\quad m=0$

Rette verticali $\boxed{x=\text{costante}}$ $\quad m$ NON ESISTE → Le RETTE VERTICALI sono le UNICHE rette PRIVE del coefficiente angolare

Retta inclinata $\boxed{y=mx+q}$ $\quad$ con $m\neq 0$

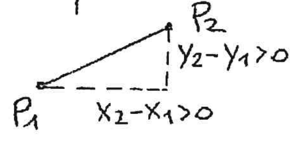
OSS. Con l'equazione $y=mx+q$ si ottengono tutte le rette (anche quelle orizzontali per $m=0$) ad eccezione delle rette verticali.

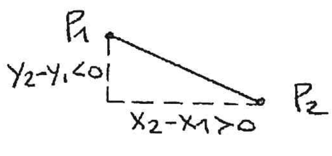
Retta in forma cartesiana $\boxed{y=mx+q}$

q è l'ordinata all'origine in quanto la retta passa per $(0,q)$

m è il coefficiente angolare che indica l'inclinazione o la pendenza della retta

Supponiamo di fissare a caso 2 punti $\overset{P_1}{\overset{\shortparallel}{(x_1,y_1)}}$ e $\overset{P_2}{\overset{\shortparallel}{(x_2,y_2)}}$ sulla retta con $x_1<x_2$: l'ascissa subisce un incremento pari a x_2-x_1 passando da P_1 a P_2, l'ordinata subisce una





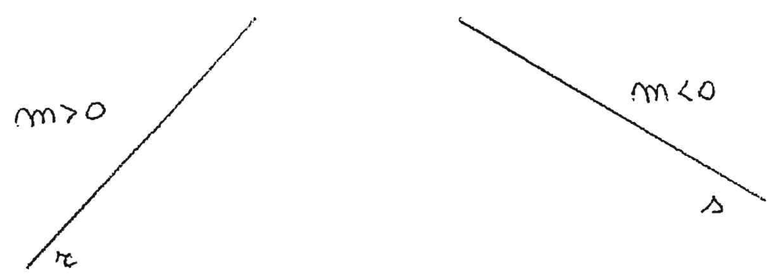
variazione $y_2 - y_1$ (che è un incremento, cioè $y_2 - y_1 > 0$, se $y_2 > y_1$, e una diminuzione, cioè $y_2 - y_1 < 0$, se $y_2 < y_1$) - Indipendentemente dal segno di $y_2 - y_1$ risulta che $y_2 - y_1 = mx_2 + \cancel{q} - mx_1 - \cancel{q} = m(x_2 - x_1)$

ossia che $\boxed{\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m}$.

Questa proprietà vale <u>indipendentemente dalla scelta dei punti P_1 e P_2</u> sulla retta e ci dice che il rapporto incrementale tra la variazione subita da y e la variazione subita da x è costante e sempre uguale a m - Spesso si scrive $\boxed{m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$.

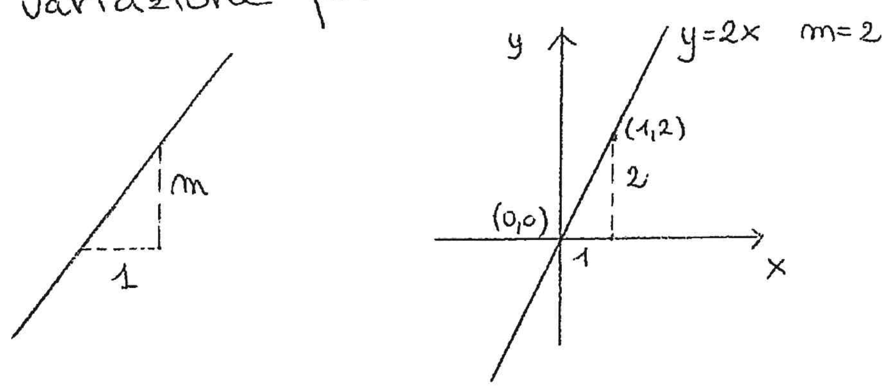
Seguono alcune conseguenze importanti:

1 - m ha sempre lo stesso segno di $y_2 - y_1$ quindi



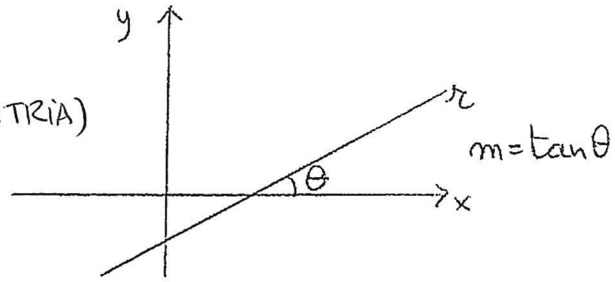
il coefficiente angolare è <u>positivo</u> se la retta è inclinata in modo <u>CRESCENTE</u> e <u>negativo</u> se la retta è inclinata in modo <u>DECRESCENTE</u>.

2 - Se $x_2 - x_1 = 1 \Rightarrow y_2 - y_1 = m$ quindi ogni volta che ci si sposta a destra di 1 nella x, l'ordinata y subisce una variazione pari a m



OSSERVAZIONE 1 - Il modo più rapido di calcolare il coefficiente angolare di una retta (quando non è noto) è considerare due punti sulla retta e calcolare $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

OSSERVAZIONE 2 - Il coefficiente angolare m è anche la tangente dell'angolo che la retta forma con il semiasse positivo delle x.
(si veda la 6ª lezione - TRIGONOMETRIA)

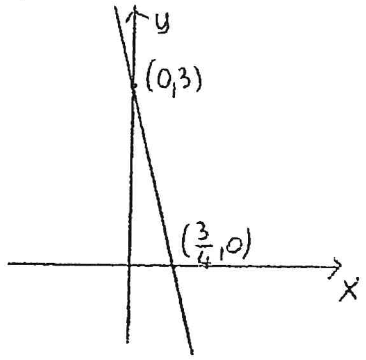


DISEGNO di una retta

Per disegnare una retta bastano due punti, di solito si utilizzano le intersezioni con gli assi (a meno che la retta non sia orizzontale o verticale).

Esempio $y = -4x + 3$ $m = -4$ → retta inclinata in modo decrescente
$q = 3$

$\cap$ asse y $(0,3)$
$\cap$ asse x $y = 0$ $-4x + 3 = 0$ $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$
$x = \frac{3}{4}$



RETTE PARALLELE e PERPENDICOLARI

E' necessario ricordare che

- una retta nella forma $y = mx + q$ è orizzontale $\Leftrightarrow$ $m = 0$
- due rette sono PARALLELE $\Leftrightarrow$ hanno lo stesso coefficiente angolare nella forma $y = mx + q$
- due rette nella forma $y = mx + q$, $y = m'x + q'$ sono PERPENDICOLARI $\Leftrightarrow$ il prodotto dei coefficienti angolari $m \cdot m' = -1$

In particolare data una retta r di coeff. angolare $m \neq 0$ tutte le rette perpendicolari a r hanno coeff ang $m_\perp = -\frac{1}{m}$.

COME SCRIVERE L'EQUAZIONE di una RETTA

- RETTA per un punto $P_0=(x_0,y_0)$ di coeff. angolare m:

$$y=y_0+m(x-x_0)$$

- FASCIO di tutte le rette non verticali passanti per $P_1=(x_1,y_1)$:

$$y=y_1+m(x-x_1) \qquad m\in\mathbb{R}$$

- RETTA VERTICALE per $P_0=(x_0,y_0)$: $x=x_0$
- RETTA ORIZZONTALE per $P_0=(x_0,y_0)$: $y=y_0$
- RETTA per 2 PUNTI $P_0=(x_0,y_0)$ e $P_1=(x_1,y_1)$: $\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}=\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}$

tuttavia è più comodo calcolare $m=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ e poi $y=y_0+m(x-x_0)$.

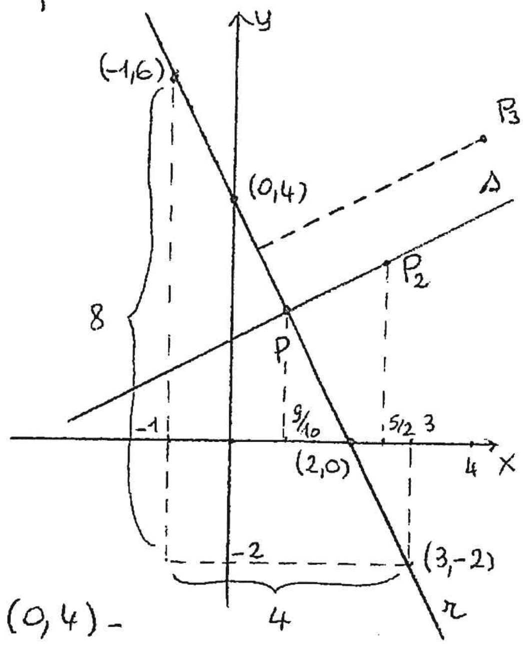
DISTANZA di un PUNTO da una RETTA

$P_0=(x_0,y_0)$

retta r: $ax+by+c=0$

$$\text{dist}(P_0,r)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Esempio - ⊙ Determinate la retta r per i due punti $P_0=(3,-2)$ e $P_1=(-1,6)$



Disegno i due punti P_0 e P_1 e vedo che $m<0$, misuro le variazioni di x e di y senza preoccuparmi del segno e calcolo $m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\dfrac{8}{4}=-2$

$\left(\text{oppure } m=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\dfrac{6+2}{-1-3}=\dfrac{8}{-4}=-2\right).$

Allora la retta r ha eq.^{ne} $y=-2-2(x-3)$

ossia $y=-2x+4$ e $\cap$ gli assi in $(2,0)$ e $(0,4)$.

⊙ Determinate la retta s che passa per $P_2=(\frac{5}{2},3)$ ed è perpendicolare alla retta r e il punto in cui si intersecano

$m_r = -2 \qquad m_s = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2} \qquad s:\ y = 3 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right)$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$$

$r \cap s \begin{cases} y = -2x+4 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{4} \end{cases}$ elimino y $\quad -2x + 4 = \frac{1}{2}x + \frac{7}{4} \quad \frac{5}{2}x = \frac{9}{4} \quad x = \frac{9}{10}$

$x = 9/10$

$\begin{cases} y = -\frac{9}{5} + 4 = \frac{11}{5} \\ y = \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{10} + \frac{7}{4} = \frac{44}{20} = \frac{11}{5} \end{cases}$

$\cap\ P = \left(\frac{9}{10}, \frac{11}{5}\right)$

⊙ Determinate la distanza del punto $P_3 = (4,5)$ dalla retta r

$r:\ 2x + y - 4 = 0$

$P_3 = (4,5)$

$$\text{dist}(P_3, r) = \frac{|2\cdot 4 + 5 - 4|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{9}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5} \simeq 4$$