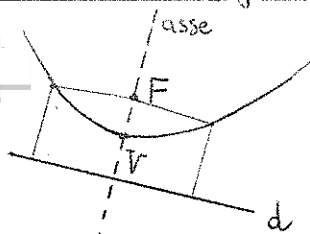


4^a lezione**PARABOLE**

Def. Assegnati un punto del piano F (detto Fuoco) e una retta d (detta DIRETTRICE) si chiama PARABOLA la curva che si ottiene come luogo geometrico dei punti equidistanti da F e da d . La retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice si chiama ASSE della parabola. La parabola risulta SIMMETRICA rispetto al suo asse.

Noi consideriamo parabole con ASSE parallelo all'asse y .

Nei corsi di ANALISI 1 e 2 può capitare di incontrare una parabola con asse // asse x .

L'equazione di una PARABOLA con ASSE // asse y è data da

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{con } a \neq 0 \quad (\text{se } a=0 \text{ l'eq. fornisce una retta})$$

Una parabola si disegna calcolando il suo VERTICE che è l'unico punto della parabola che appartiene all'asse. Le coordinate del vertice sono date da

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

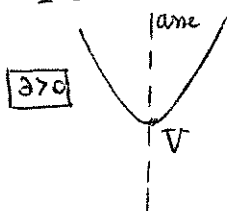
$\underset{x_v}{\parallel}$
 $\underset{y_v}{\parallel}$

anche se

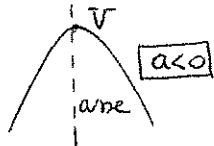
per calcolare y_v spesso è più semplice utilizzare l'eq. $y_v = ax_v^2 + bx_v + c$.

Oltre al vertice si calcolano i punti di intersezione con i due assi (con l'asse x solo se ce ne sono) ^{(*) pag. 2} e si tiene conto di

1- Se $a > 0$ la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto



mentre se $a < 0$ ha la concavità rivolta verso il basso



2. La parabola è perfettamente simmetrica rispetto al suo asse (che è la retta VERTICALE passante per il VERTICE di equazione $x=x_v$)

- 2 -

⊕ L'asse y: $(0, c)$ se ce ne sono.
 L'asse x: $(x, 0)$ con V dell'eq. di 2° grado $ax^2+bx+c=0$ se ce ne sono.

ESEMPIO - $y = -x^2 + 4x - 3$ parabola rivolta verso il basso ($a = -1 < 0$)

di VERTICE $V = (2, 1)$ $x_v = \frac{-4}{-2} = 2$ $y_v = -4 + 8 - 3 = 1$

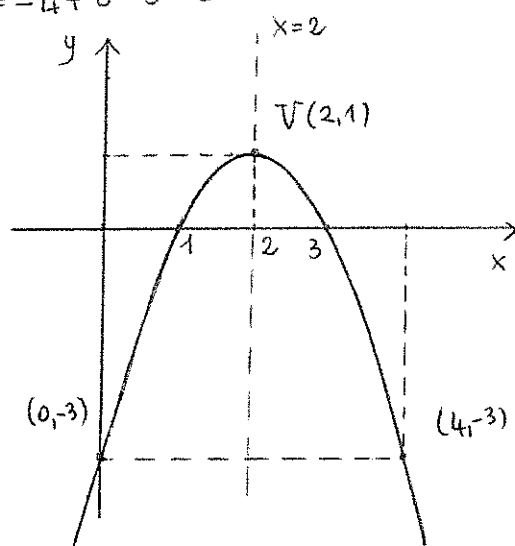
asse di simmetria $x = 2$

L'asse y $(0, -3)$

L'asse x

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$$

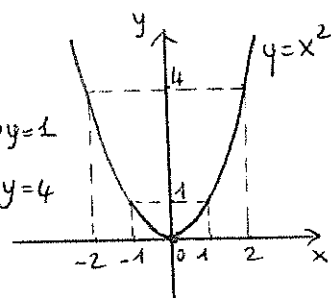


OSSERVAZIONE 1 - La parabola $y = x^2$ è la parabola di $V(0, 0)$

rivolta verso l'alto con asse di simmetria coincidente con l'asse y e $a = 1$; viene detta PARABOLA di base - Il numero

$|a|$ = APERTURA della parabola; più $|a|$ è piccolo

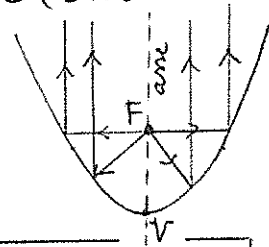
più la parabola è larga mentre se $|a|$ è grande, allora la parabola risulta stretta.



In particolare se $|a| < 1$, allora la parabola è più larga di $y = x^2$, mentre se $|a| > 1$ è più stretta. Se $|a| = 1$ le due parabole hanno la stessa apertura: ad es. la parabola dell'es. precedente $y = -x^2 + 4x - 3$ ha la stessa apertura di $y = x^2$ quindi è la stessa parabola semplicemente capovolta e traslata in modo che il suo vertice coincida con $(2, 1)$.

Vedremo più avanti che dalla parabola di base è possibile ricostruire tutte le altre parabole con una formula che tiene conto delle trasformazioni effettuate per passare dall'una all'altra.

OSSERVAZIONE 2 - La parabola ha l'importante proprietà che tutti i RAGGI emessi dal FUOCO (siano essi LUMINOSI, SEGNALI SATELLITARI, RADIO, TELEVISIVI), vengono riflessi dalla parabola come paralleli all'asse, quindi perfettamente dritti. Per questo la parabola è utilizzata nei FANALI (con lampadina posta nel fuoco) e nelle ANTENNE PARABOLICHE (sia in RICEZIONE che in TRASMISSIONE).



METODO delle PARABOLE per la SOLUZIONE delle DISEQUAZIONI di SECONDO GRADO

ES. 1) $x - 3x^2 + 2 > 0$ riordiniamo l'equazione e facciamo in modo che il coeff. di x^2 risulti positivo: $3x^2 - x - 2 < 0$

Consideriamo la PARABOLA associata alla disequazione:

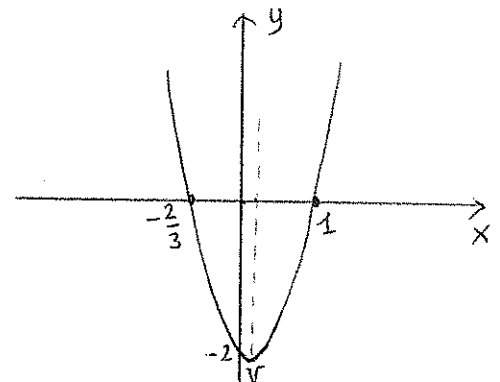
$$y = 3x^2 - x - 2$$

La DISEQ.^{ne} $3x^2 - x - 2 < 0 \iff$ per quali $x \in \mathbb{R}$ $y_{\text{par}} < 0$

La parabola è rivolta verso l'alto (e saremo sempre in questo caso se il coeff. di x^2 è positivo) i cerchiamo le

Radici x ossia

$$y = 0 \Rightarrow 3x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

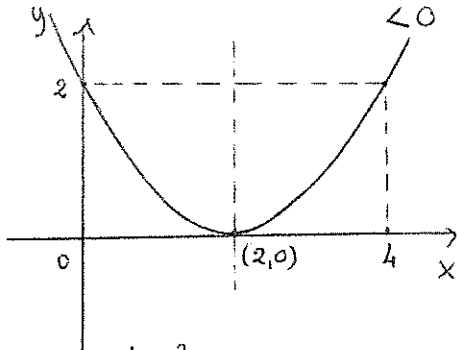


Non serve calcolare il VERTICE per fare un disegno approssimativo (anche se sicuramente $x_v = \frac{1}{6}$, a metà tra $-\frac{2}{3}$ e 1)

del grafico della parabola. Dal disegno si vede subito che $y < 0$ se $x \in]-\frac{2}{3}, 1[$, quindi

SOL.^{ui} DIS.^{ue} $\boxed{x \in]-\frac{2}{3}, 1[}$

ES.2) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 \geq 0$
 > 0
 ≤ 0
 < 0



parabola associata $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$
 verso l'alto

Nonex $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0 \quad x_1 = 2$

$\Rightarrow$ la parabola è tangente all'asse x in $(2, 0)$
 che risulta anche essere il VERTICE

Dal disegno risulta pertanto

$\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$	SOL. ^{ui} $\forall x$
$> 0 \Leftrightarrow y > 0$	SOL. ^{ui} $\forall x \neq 2$
$\leq 0 \Leftrightarrow y \leq 0$	SOL. ^{ui} $x = 2$
$< 0 \Leftrightarrow y < 0$	SOL. ^{ui} nessuna

ES.3) $4x^2 - x + \frac{1}{3} \geq 0$
 > 0
 ≤ 0
 < 0

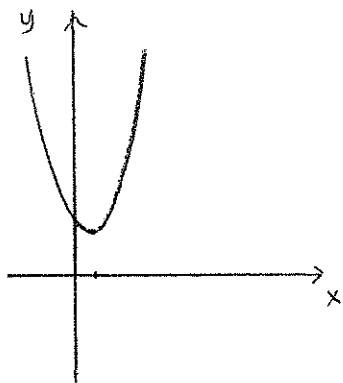
parabola associata $y = 4x^2 - x + \frac{1}{3}$

verso l'alto

Nonex $4x^2 - x + \frac{1}{3} = 0 \quad \Delta < 0$ nessuna intersezione con l'asse x

$\Rightarrow$ la parabola si trova tutta al di sopra dell'asse x ($V = (\frac{1}{8}, \frac{13}{48})$)

Dal disegno risulta pertanto



$4x^2 - x + \frac{1}{3} \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$	SOL. ^{ui} $\forall x$
$> 0 \Leftrightarrow y > 0$	SOL. ^{ui} $\forall x$
$\leq 0 \Leftrightarrow y \leq 0$	SOL. ^{ui} nessuna
$< 0 \Leftrightarrow y < 0$	SOL. ^{ui} nessuna

PARABOLE con asse // asse x

equazione $x = ay^2 + by + c$ $V(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a})$

$a > 0$

$a < 0$



Nonex $(c, 0)$ Nonex $y : (0, y)$ con y sol.^{ue} di

$ay^2 + by + c = 0$ se ce ne sono

asse di simmetria // asse x di eq.^{ue} $y = y_v$.