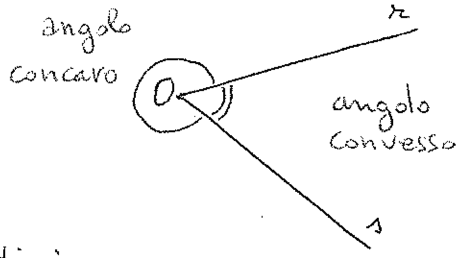
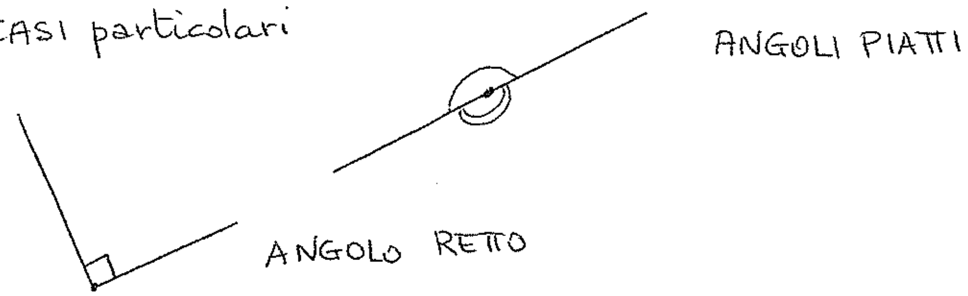
ANGOLI e TRIGONOMETRIA

In un piano consideriamo due semirette r, s aventi la stessa origine O : queste semirette dividono il piano in due parti

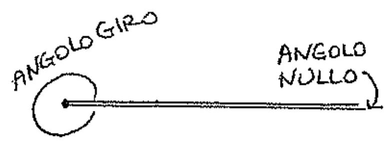


Si dice ANGOLO ciascuna delle due parti in cui il piano è diviso da due semirette aventi l'origine in comune. Le semirette si dicono LATI dell'angolo, l'origine si dice VERTICE dell'angolo.

CASI particolari



Se le due semirette sono SOVRAPPOSTE generano l'angolo NULLO e l'angolo GIRO



- Un angolo si indica con lettere greche minuscole: α, β ecc.

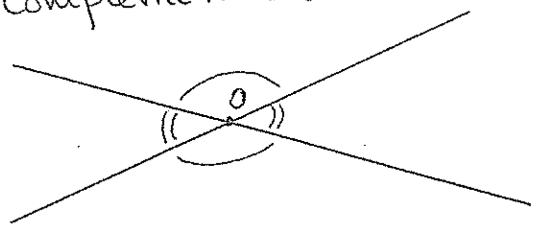
Si definisce BISETTRICE di un ANGOLO la semiretta di origine O, interna all'angolo, che divide l'angolo in due parti congruenti.

Due angoli si dicono ESPLEMENTARI se hanno per somma un angolo giro.

Due angoli si dicono SUPPLEMENTARI se hanno per somma un angolo piatto.

Due angoli si dicono COMPLEMENTARI se la loro somma è congruente ad un angolo retto.

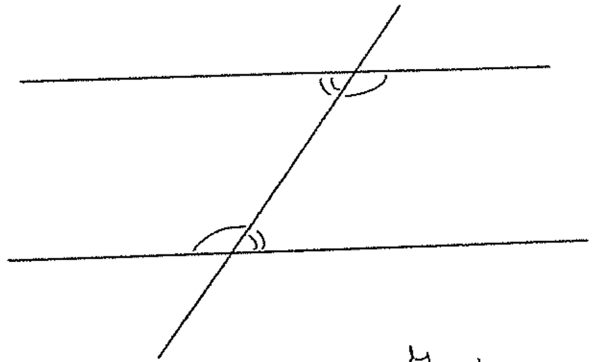
Nelle seguenti situazioni è utile saper riconoscere gli angoli congruenti, supplementari e complementari :



ANGOLI OPPOSTI AL VERTICE

gli angoli indicati allo stesso modo sono congruenti (gli angoli opposti al vertice sono congruenti).

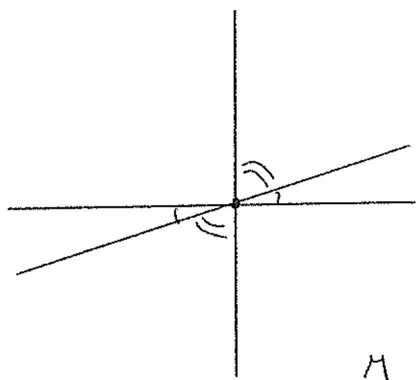
I due angoli)) e) sono SUPPLEMENTARI.



RETTE PARALLELE TAGLIATE DA UNA RETTA OBLIQUA

Gli angoli indicati allo stesso modo (detti alterni interni) sono congruenti.

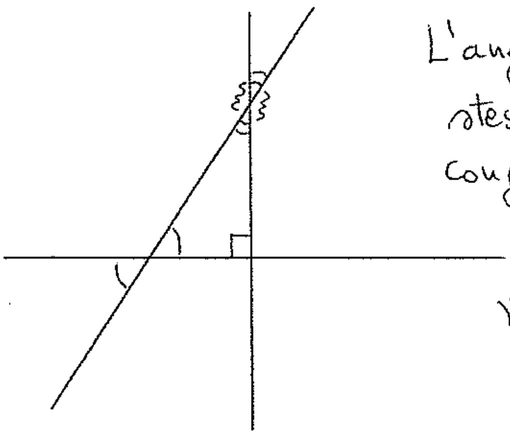
I due angoli)) e) (detti coniugati interni) sono supplementari.



RETTE PERPENDICOLARI CON UNA RETTA OBLIQUA

Gli angoli indicati allo stesso modo (opposti al vertice tra loro) sono congruenti.

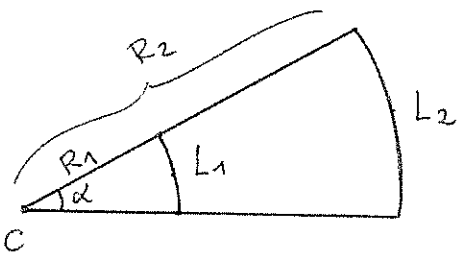
I due angoli)) e) sono complementari



L'angolo ⌉ è retto, gli angoli indicati allo stesso modo (opposti al vertice tra loro) sono congruenti. I due angoli) e)) sono complementari. I due angoli)) e ξ sono supplementari.

Gli ANGOLI si misurano principalmente in $\boxed{\text{GRADI}}$ o in $\boxed{\text{RADIANTI}}$.

Il GRADO è la novantesima parte dell'ANGOLO RETTO (angolo retto = 90°, angolo piatto = 180°, angolo giro = 360°).
La misura degli angoli in gradi è basata su un sistema sessagesimale e non su un sistema decimale e questo rende i calcoli complicati. Inoltre è molto poco pratica.
Per semplificare i calcoli e per altre buone ragioni a cui accenneremo, in Matematica si misurano gli angoli in RADIANTI.
Presi due SETTORI CIRCOLARI di raggi diversi R_1 e R_2, ma concentrici e corrispondenti allo stesso angolo al centro si osserva che



$$R_1 : R_2 = L_1 : L_2 \Rightarrow \frac{L_1}{R_1} = \frac{L_2}{R_2}$$

Ne deduciamo che il rapporto $\frac{L}{R} = \frac{\text{lunghezza dell'arco}}{\text{raggio}}$ è COSTANTE, cioè NON VARIA al VARIARE della CIRCONFERENZA, ma DIPENDE SOLO dall'ANGOLO AL CENTRO α.
Il rapporto $\frac{L}{R}$ viene assunto come misura, in RADIANTI, di α:

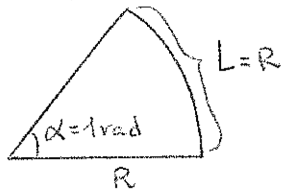
$$\alpha = \frac{L}{R} \text{ RADIANTI.}$$

Quindi

Def. (RADIANTE) Si dice ANGOLO di UN RADIANTE l'angolo al centro di una circonferenza che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio (qualunque sia la circonferenza).

Infatti

Se $\alpha = 1 \rightarrow \frac{L}{R} = 1 \rightarrow L = R$.



Se α è misurato in RADIANTI, allora

angolo giro $= \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$

angolo piatto $= \frac{\pi R}{R} = \pi$

angolo retto $= \frac{\frac{\pi}{2} \cdot R}{R} = \frac{\pi}{2}$.

Viceversa, la lunghezza di un arco è $L = \alpha R$ con α misurato in radianti e l'area del settore circolare è

$A_{settore} = \frac{1}{2} L \cdot R = \frac{1}{2} \alpha R^2$

(da cui per $A_{cerchio} = \frac{1}{2} 2\pi R^2 = \pi R^2$ ben nota formula)

$\boxed{\text{DAI GRADI AI RADIANTI e Viceversa}}$

$360° : 2\pi = \alpha° : \alpha_{RAD}$ dove $\alpha°$ è la misura in gradi di α mentre α_{RAD} è la misura radianti di α

$\Rightarrow \quad \alpha_{rad} = \frac{2\pi}{360} \alpha° = \frac{\pi}{180} \alpha°$ e $\alpha° = \frac{180}{\pi} \alpha_{rad}$

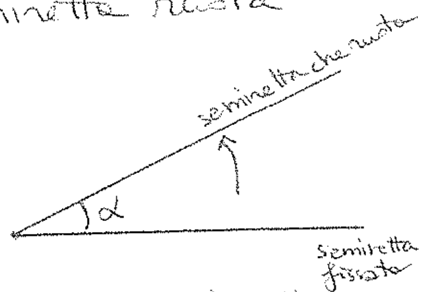
Ad es. $\alpha = 45°$ corrisponde a $\alpha_{rad} = \frac{\pi}{180} \cdot 45 = \frac{\pi}{4}$ cioè esattamente metà di un angolo retto

$\alpha = \frac{3}{4}\pi$ (radianti) corrisponde a $\alpha = \frac{\overset{45}{\cancel{180}}}{\cancel{\pi}} \cdot \frac{3}{\cancel{4}} \cancel{\pi} = 135°$ ($\frac{3}{4}$ di un angolo piatto)

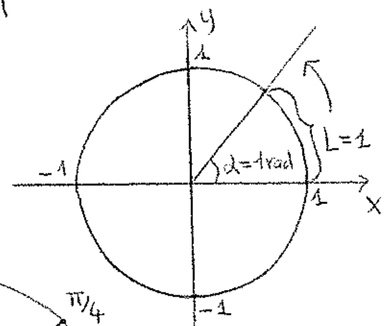
$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}$ (angolo piatto)

$\alpha = 1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi} \simeq 57,3^\circ$

Gli ANGOLI si MISURANO in VERSO ANTIORARIO fissando una delle due semirette orizzontale verso destra e misurando l'angolo mentre la seconda semiretta ruota in verso antiorario.



Risulta molto comodo fissare la 1ª semiretta coincidente con il semiasse positivo delle x e misurare gli angoli (in verso antiorario) sulla CIRCONFERENZA GONIOMETRICA che è la circonferenza di $C(0,0)$ e $R=1$. La circonferenza ha equazione $x^2+y^2=1$ e avendo il raggio $R=1$, risulta che l'angolo misurato in radianti è $\alpha = L$. L'angolo di 1 rad corrisponde ad un arco lungo $L=1$.



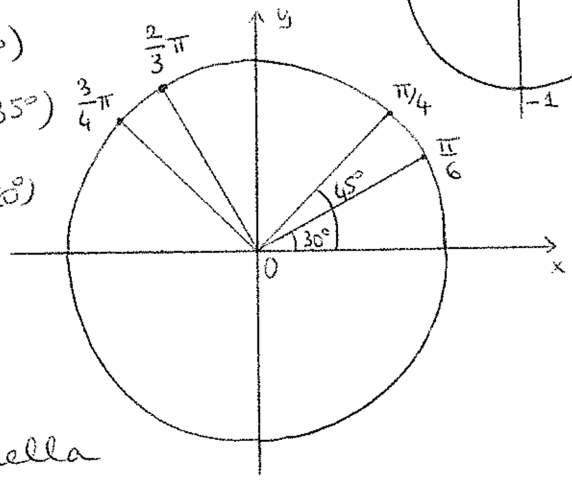
Disegnamo i seguenti angoli: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{\pi}{6}$

$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}$ angolo piatto (in gradi $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$)

$\frac{3}{4}\pi = 3 \cdot \frac{\pi}{4}$ = tre volte $\frac{1}{4}$ angolo piatto (135°)

$\frac{2}{3}\pi = 2 \cdot \frac{\pi}{3}$ = 2 volte $\frac{1}{3}$ angolo piatto (120°)

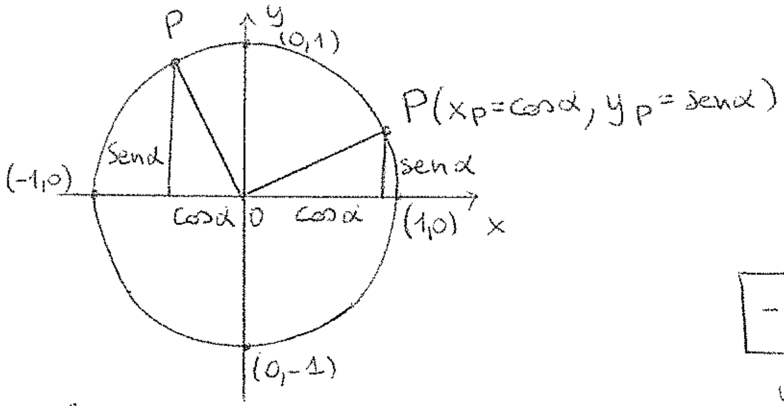
$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{6}$ angolo piatto (30°)



La $\boxed{\text{TRIGONOMETRIA}}$ si occupa della RISOLUZIONE di un TRIANGOLO, cioè di determinare tutti gli elementi di un triangolo (tutti i lati e tutti gli angoli) essendo noti alcuni di essi.

E' necessario introdurre i concetti di $\boxed{\text{SENO}}$ e $\boxed{\text{COSENO}}$ di un ANGOLO.

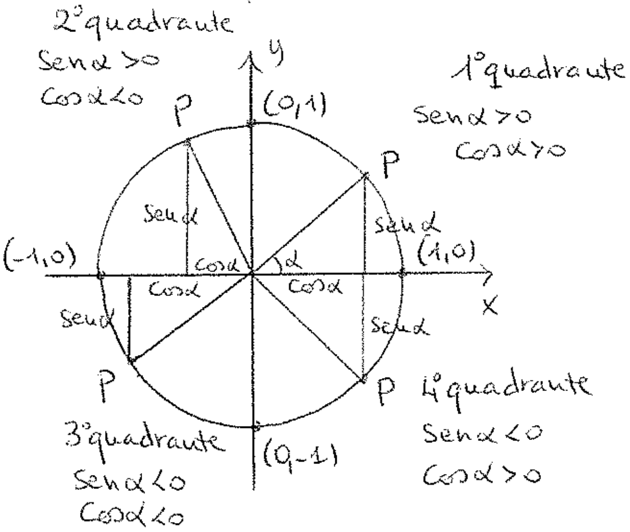
Preso un angolo α, sulla CIRCONF. GONIOMETRICA vi corrisponde un punto P. Si definiscono COSENO e SENO dell'angolo α (indicati con $\cos\alpha$ e $\mathrm{sen}\,\alpha$) rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del punto P.

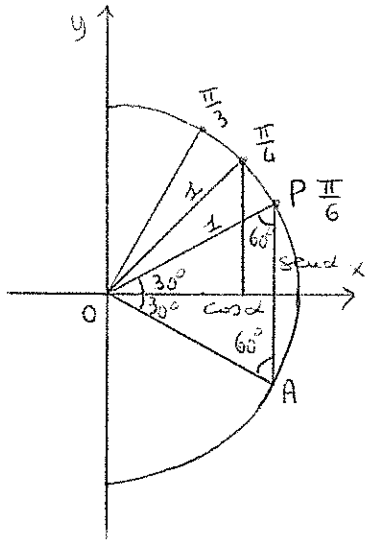


Risulta immediatamente che

$$\boxed{\cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\alpha = 1} \quad \forall\alpha$$

$$\boxed{-1 \le \cos\alpha \le 1,\ -1 \le \mathrm{sen}\,\alpha \le 1}$$





Per calcolare il seno e il coseno di $\alpha = \frac{\pi}{4}$ basta osservare che sono uguali e uguali al lato di un quadrato che ha diagonale 1:

$d = l\cdot\sqrt{2} \Rightarrow l\cdot\sqrt{2} = 1 \Rightarrow l = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \mathrm{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Per calcolare invece il seno e il coseno di $\alpha = \frac{\pi}{6}$ consideriamo il triangolo $O\hat{A}P$ che risulta EQUILATERO di $l = 1$. Poichè seno $= \frac{1}{2}l \Rightarrow \mathrm{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ e per il Teorema di Pitagora $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

gradi	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
radianti	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
seno	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1				
coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{2}/2$	$\frac{1}{2}$	0				