

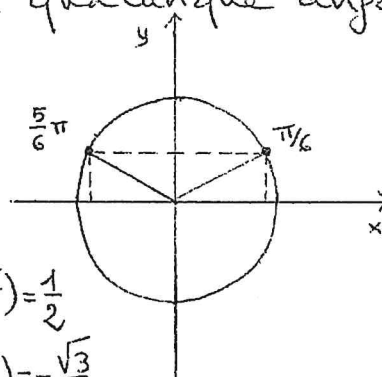
6^a lezioneRiprendiamo la **TRIGONOMETRIA**

Dai valori di SENO e COSENO degli angoli $0 \frac{\pi}{6} \frac{\pi}{4} \frac{\pi}{3} \frac{\pi}{2}$ posti nel 1° quadrante è possibile calcolare il valore di SENO e

COSENO di un qualunque angolo α con $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Ad esempio

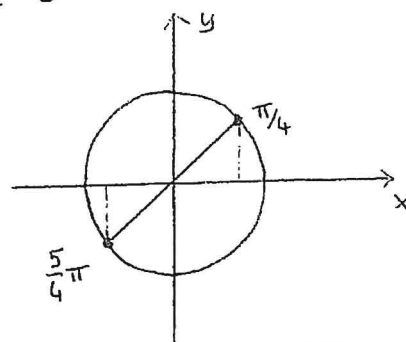
$$\alpha = \frac{5}{6}\pi \quad (-150^\circ)$$



$$\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

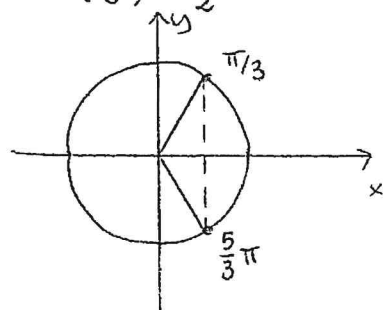
$$\alpha = \frac{5}{4}\pi \quad (225^\circ)$$



$$\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \frac{5}{3}\pi \quad (300^\circ)$$



$$\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Un angolo può essere anche maggiore di un angolo giro: se la semiretta continua a ruotare in verso antiorario si ottengono angoli $\alpha > 2\pi$.

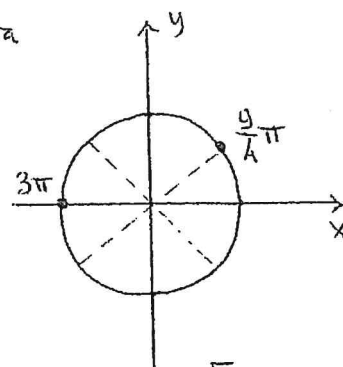
ES. $\alpha = 3\pi$ si ottiene dalla rotazione della semiretta di 1 giro e $\frac{1}{2}$

Il seno e il coseno sono gli stessi dell'angolo corrispondente in $[0, 2\pi]$

$$\sin(3\pi) = 0 \quad \cos(3\pi) = -1$$

In gradi $\alpha = 540^\circ$.

$\alpha = \frac{9}{4}\pi$ si ottiene da una rotazione di 1 giro + $\frac{\pi}{4}$ (405°)



$$\sin\left(\frac{9}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{9}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

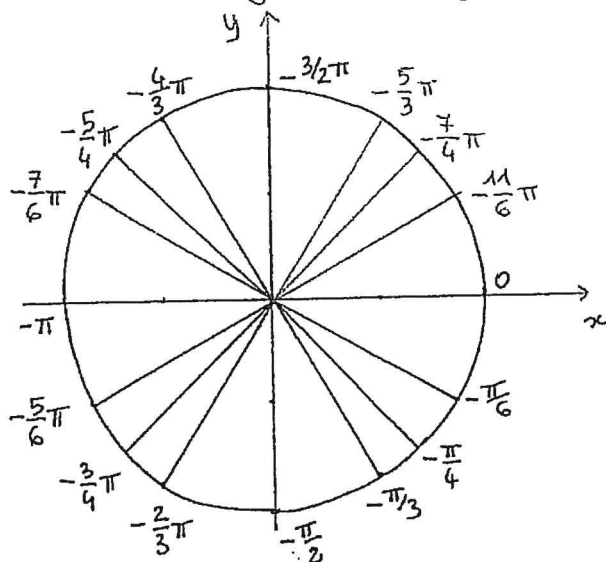
E' possibile considerare anche ANGOLI NEGATIVI

-2-

$\alpha < 0$.

Così come sulla retta reale (orientata verso destra) il numero $x = -2$ si trova di 2 unità prima di $x = 0$, gli angoli negativi si trovano (girando in verso antiorario) prima dell'angolo 0.

Ad esempio si ottengono i seguenti angoli



$-\frac{\pi}{6} = -30^\circ$ si trova 30° prima di 0 (cioè da $-\frac{\pi}{6}$ in verso antiorario dopo 30° si ^{trova} l'angolo 0 ; $-\frac{2}{3}\pi = -120^\circ$ si trova 120° prima di 0 (da $-\frac{2}{3}\pi$ in verso antiorario dopo 120° si trova l'angolo 0) e così via.

Quindi per individuare la posizione di un angolo $\alpha < 0$, basta in realtà spostarsi da 0 in verso orario del corrispondente angolo senza il segno -; ma NON SI DEVE PENSARE che gli angoli negativi si misurino in verso orario ...

Il seno e il coseno di tali angoli si calcolano mediante ascissa e ordinata del punto corrispondente sulla circonf. goniometrica, non appena disegnato l'angolo.

Ad es. $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$, $\cos(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(-\frac{3}{4}\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(-\frac{3}{4}\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

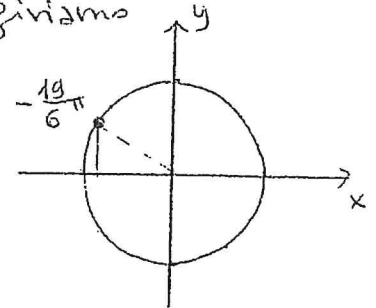
$\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$

Gli angoli negativi possono essere anche $\alpha < -2\pi$:

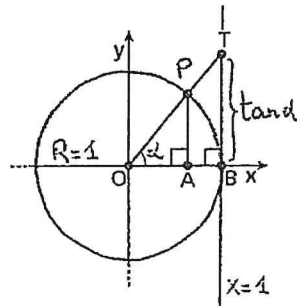
per disegnarli si procede come per quelli $> 2\pi$ tenendo conto del segno $\ominus$.

Ad es. $\alpha = -\frac{19}{6}\pi$ è un angolo negativo di $-(2\pi + \frac{7}{6}\pi)$, cioè 1 giro e $\frac{7}{6}\pi$ prima dell'angolo 0. Per disegnarlo giriamo da 0 in verso orario per 1 giro e $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}$

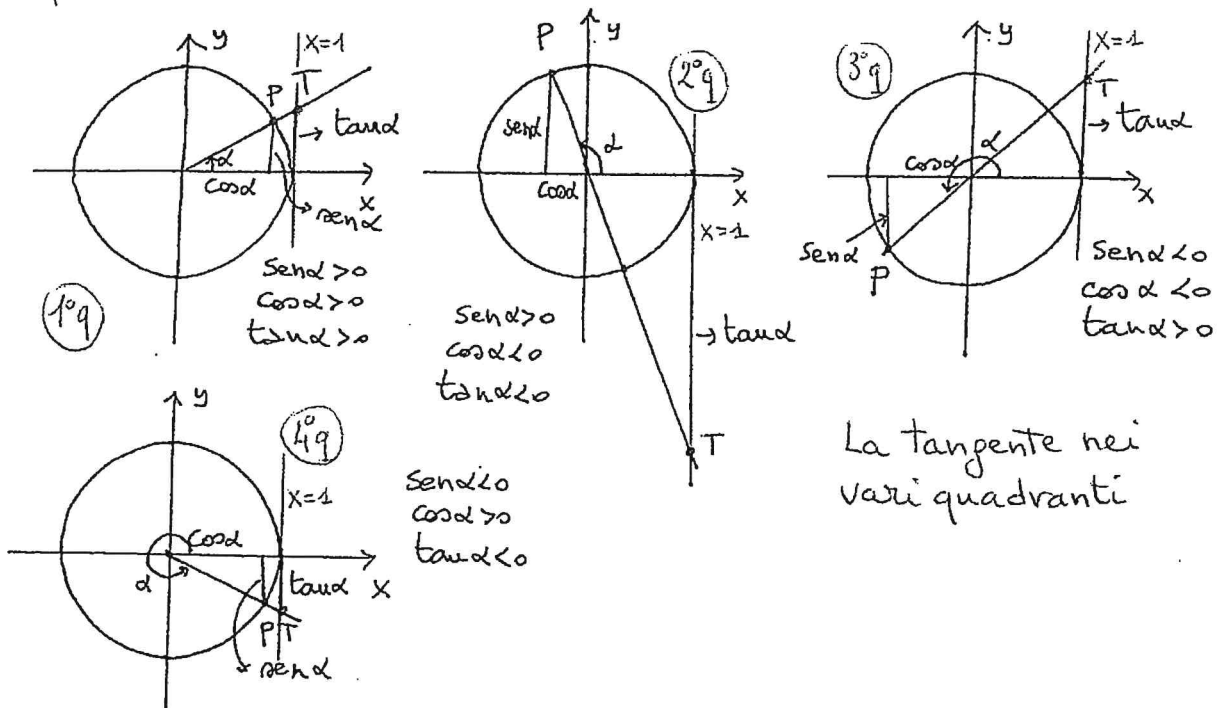
$$\sin(-\frac{19}{6}\pi) = \frac{1}{2} \quad \cos(-\frac{19}{6}\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



TANGENTE



Def. Data la circonfer. goniometrica (centro $C(0,0)$ e $R=1$) e fissato un angolo α con $0 \leq \alpha < 2\pi$, la TANGENTE dell'angolo α ($\tan \alpha$) è l'ordinata del punto in cui la retta verticale $x=1$ interseca la semiretta uscente dall'origine e passante per P. Nel disegno $\tan \alpha = y_T$.



Si noti che mentre $\tan 0 = 0$ $\tan \pi = 0$ risulta che $\tan \frac{\pi}{2}$ e $\tan \frac{3}{2}\pi$ NON ESISTONO perché la semiretta OP è verticale e NON INTERSECA la retta $x=1$.

Dalla similitudine tra i due TRIANGOLI $\triangle OAP$ e $\triangle OBT$ otteniamo che

$$\text{sen } \alpha : \text{tan } \alpha = \text{cos } \alpha : 1$$

da cui si ricava $\boxed{\text{tan } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}}$ che consente di calcolare

la tangente dei vari angoli. Per angoli $\alpha \geq 2\pi$ o $\alpha < 0$ si procede come già spiegato.

(*) se $\text{cos } \alpha \neq 0$

Otteniamo i seguenti valori

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$

(**) se la RETTA è VERTICALE allora si ottiene $\tan \frac{\pi}{2}$ che NON ESISTE e infatti le RETTE VERTICALI SONO PRIVE del COEFFICIENTE ANGOLARE

ES. $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$  
 $\tan(\frac{5}{2}\pi) \nexists$
 $\tan(\frac{7}{6}\pi) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 
 $\tan(\frac{2}{3}\pi) = -\sqrt{3}$ 
 $\tan(-\frac{7}{3}\pi) = -\sqrt{3}$ 

IL COEFFICIENTE ANGOLARE di una retta

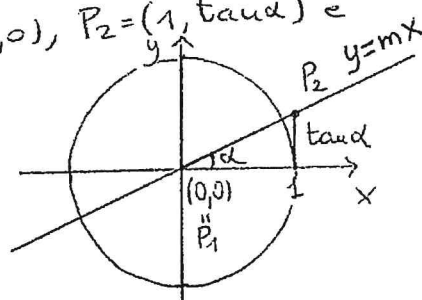
Consideriamo la circonferenza trigonometrica e la retta $y = mx$ di coeff. angolare m .

Abbiamo visto che presi

comunque due punti sulla retta $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ risulta che $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Consideriamo $x_1 = 0$ e $x_2 = 1 \Rightarrow P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, \text{tan } \alpha)$ e

$\boxed{m = \text{tan } \alpha}$ - In generale

il COEFFICIENTE ANGOLARE di una retta è uguale alla TANGENTE dell'ANGOLO che la retta forma con l'asse x (orientato verso destra).



(**)