FUNZIONI

Def. Una $\boxed{\text{FUNZIONE}}$ tra due insiemi $f: A \to B$ è una LEGGE che ad ogni elemento del primo insieme A (detto DOMINIO) associa UNO ED UN SOLO ELEMENTO del secondo insieme B (detto CODOMINIO). Quindi

$$a \longrightarrow \overset{f}{\boxed{\text{LEGGE}}} \longrightarrow b = f(a)$$

$$\forall a \in A \quad \exists!\, b \in B \quad : \quad f(a) = b.$$

Si dice che b è l' IMMAGINE di a tramite f.
Per definizione di funzione l'immagine di un qualunque $a \in A$ è UNICA.

OSS. A è l'insieme su cui la legge è definita, B è l'insieme di arrivo. La funzione non è solo la legge ma è la TERNA costituita da (A, B, LEGGE); cambiando A e/o B possono modificarsi le proprietà della funzione.

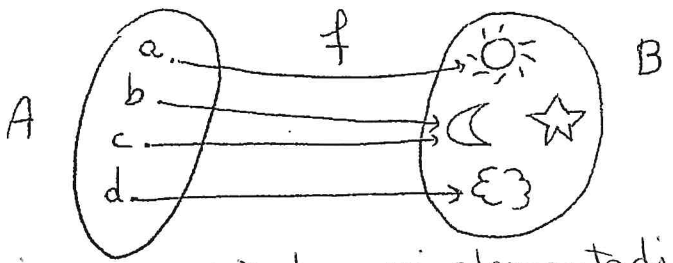
ES. $A = \{$studenti di questa classe$\}$

$B = \{$stature in cm da 150 cm a 200 cm$\}$
(150 cm = 1,50 m; 200 cm = 2 m)

La legge $f: A \to B$ che ad ogni studente associa la sua statura è una FUNZIONE.
Può succedere che due o più studenti abbiano la stessa statura, cioè la stessa immagine, ma questo non è un problema, oppure che qualche statura non ce l'abbia nessuno, ma neanche questo è un problema. Per avere una funzione è richiesto che ogni studente abbia un'unica statura perfettamente definita.

ES. $A = \{a, b, c, d\}$ $\quad B = \{$☼, ☾, ☆, ☁$\}$

$f: A \to B$



esempio di funzione definita tramite un diagramma a frecce

È una FUNZIONE perchè da ogni elemento di A parte una ed una sola FRECCIA.

Abbiamo che $f(a) = ☼$ e $f(c) = ☾$

<u>Def</u>. Si dice IMMAGINE di A tramite f o $\boxed{\text{IMMAGINE di } f}$ l'insieme delle immagini di tutti gli elementi di A

$$\mathrm{Im} f = f(A) = \{ f(a) : a \in A \}.$$

ES. Nel nostro esempio $\mathrm{Im} f = \{ ☼, ☾, ☁ \}$. La ☆ $\notin \mathrm{Im} f$ perchè non è immagine di nessun elemento di A.

<u>Def</u>. Dato $b \in B$ se $f(a) = b$ si dice che a è $\boxed{\text{CONTROIMMAGINE}}$ di b e si indica con $f^{-1}(b)$ l'insieme di tutte le controimmagini di b. <u>$f^{-1}(b)$ è un INSIEME</u>

OSS. Dato $b \in B$ l'insieme $f^{-1}(b)$ può essere vuoto se $b \notin \mathrm{Im} f$, oppure contenere uno o più elementi (anche infiniti).

ES. Nel nostro esempio $f^{-1}(☼) = \{a\}$ $f^{-1}(☾) = \{b, c\}$

$f^{-1}(☆) = \emptyset$ $f^{-1}(☁) = \{d\}$.

<u>Def</u>. Una funzione $f : A \to B$ si dice $\boxed{\text{INIETTIVA}}$ se

$\forall b \in B$ l'insieme $f^{-1}(b)$ contiene al massimo un elemento,

cioè se ogni elemento $b \in B$ ammette <u>al più una controimmagine</u>.

<u>OSS</u>. Se f è iniettiva $f^{-1}(b)$ può essere $\emptyset$ oppure contenere 1 solo elemento.

ES. Nel nostro esempio f non è iniettiva perchè $f^{-1}(☾)$ contiene due elementi.

<u>Def</u> Una funzione $f : A \to B$ si dice $\boxed{\text{SURIETTIVA}}$ se

$\forall b \in B$ l'insieme $f^{-1}(b) \neq \emptyset$,

cioè se ogni elemento $b \in B$ ammette <u>almeno una controimmagine</u>.

Osserviamo che $\boxed{f \text{ SURIETTIVA} \iff \mathrm{Im} f = B}$

Dimostrazione.

Infatti se f è suriettiva $\Rightarrow \forall b \in B$ b ammette almeno una controimmagine $\Rightarrow \forall b \in B$ b è immagine di un qualche $a \in A$ $\Rightarrow \forall b \in B$ $b \in \mathrm{Im} f \Rightarrow \mathrm{Im} f = B$.

Viceversa se $\mathrm{Im} f = B \Rightarrow \forall b \in B \ \exists a \in A : f(a) = b \Rightarrow \forall b \in B \ f^{-1}(b) \neq \emptyset$ $\Rightarrow f$ è SURIETTIVA.

ES. Nel nostro esempio f non è suriettiva perchè $f^{-1}(☆) = \emptyset$ oppure perchè $\mathrm{Im} f \neq B$ (non contenendo appunto ☆).

<u>Def</u> Una funzione $f: A \to B$ si dice BIUNIVOCA se è sia INIETTIVA sia SURIETTIVA ossia se

$$\forall b \in B \ \exists! \, a \in A : f(a) = b$$

cioè $\forall b \in B$ l'insieme delle controimmagini $f^{-1}(b)$ contiene <u>uno ed un solo elemento</u>. (*) (Essendo SURIETTIVA almeno una controimmagine, essendo INIETTIVA al più una controimmagine, quindi esattamente 1 controimm.)

<u>OSS.</u> Se una funzione è definita tramite un <u>DIAGRAMMA</u> <u>A FRECCE</u> allora

per TROVARE L'IMMAGINE di $a \in A$	BASTA SEGUIRE LA FRECCIA CHE PARTE da a
per TROVARE LE CONTROIMMAGINI di $b \in B$	BASTA TORNARE INDIETRO LUNGO LE FRECCE CHE ARRIVANO a b
per STABILIRE se f è INIETTIVA	BASTA CONTROLLARE CHE SU OGNI ELEM. di B ARRIVI AL MASSIMO UNA FRECCIA
per DETERMINARE $\mathrm{Im} f$	BASTA CONSIDERARE TUTTI GLI ELEMENTI di B su cui ARRIVA ALMENO UNA FRECCIA.
per STABILIRE se f è SURIETTIVA	BASTA CONTROLLARE CHE SU OGNI ELEM. di B ARRIVI ALMENO UNA FRECCIA (oppure CONTROLLARE se $\mathrm{Im} f = B$).

(*) Se una funzione è BIUNIVOCA l'immagine di $a \in A$ è UNICA (per definizione di funzione) e la controimmagine di $b \in B$ è UNICA.

Supponiamo ora che $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}$, consideriamo cioè FUNZIONI di VARIABILE reale $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ a VALORI REALI $y \in B \subseteq \mathbb{R}$. Se non è diversamente specificato si intende che $B = \mathbb{R}$. Quindi consideriamo FUNZIONI

$$\boxed{f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}}.$$

Esempi. ① Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 2x$ che ad ogni numero reale associa il suo DOPPIO. Ad esempio $f(3) = 6$ cioè 6 è immagine di 3, $f(-4) = -8$ cioè -8 è immagine di -4 e così via.

Viceversa $f^{-1}(4) = \{2\}$, $f^{-1}\left(-\frac{1}{9}\right) = -\frac{1}{18}$, $f^{-1}(-16) = -8$ (2 è la controimmagine di 4, $-\frac{1}{18}$ di $-\frac{1}{9}$, -8 di -16: la controimmagine è la METÀ del numero reale considerato).

In generale $\forall y \in \mathbb{R}$ $f^{-1}(y) = \left\{\frac{y}{2}\right\}$ cioè la metà di y. Non esiste nessun y che non abbia controimmagini (anche $y = 0$ $f^{-1}(0) = \{0\}$) e ogni $y \in \mathbb{R}$ ha <u>una sola</u> controimmagine $x = \frac{y}{2}$. Pertanto f è BIUNIVOCA e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$.

② Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1$: ogni $x \in \mathbb{R}$ ha come immagine $y = 1$, $\operatorname{Im} f = \{1\}$, ogni $y \neq 1$ non è immagine di nessun $x \in \mathbb{R}$, $\to$ f NON è SURIETTIVA. Per quanto riguarda le controimmagini $f^{-1}(y) = \emptyset$ se $y \neq 1$, mentre $f^{-1}(1) = \mathbb{R}$ da cui f non è neanche INIETTIVA.

③ Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ che ad ogni numero associa il suo quadrato.
Ad esempio $f(2) = 4$, $f(-2) = 4$, cioè 4 è l'immagine sia di 2 sia di -2, $f(0) = 0$. Per quanto riguarda le controimmagini $f^{-1}(4) = \{-2, 2\}$, $f^{-1}(0) = \{0\}$, $f^{-1}(25) = \{-5, +5\}$, $f^{-1}(2) = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, $f^{-1}(-4) = \emptyset$.
Se $y < 0$ $f^{-1}(y) = \emptyset$, se $y = 0$ $f^{-1}(0) = \{0\}$, se $y > 0$ $f^{-1}(y) = \{-\sqrt{y}, \sqrt{y}\}$.
In conclusione $\text{Im} f = [0, +\infty[$ e f NON è né INIETTIVA, né SURIETTIVA.

<u>OSSERVAZIONE</u>. Ricordando che una funzione è una TERNA costituita da (dom$f$, codominio di f, LEGGE) osserviamo che se considerassimo la funzione

$f: \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ definita da $f(x) = x^2$

otterremmo una funzione diversa rispetto a quella dell'esempio ③ in quanto questa funzione è <u>SURIETTIVA</u>.

<u>IMPORTANTE</u> Data una qualunque funzione $f: A \to B$ <u>non suriettiva</u> le si può sempre associare una funzione SURIETTIVA sostituendo B con $\text{Im} f$, senza modificare né il dominio, né la LEGGE:

$f: A \to \text{Im} f$ è SURIETTIVA.

Quindi trasformare una funzione rendendola suriettiva è semplice.
Invece per ottenere una funzione INIETTIVA è necessario modificarne il DOMINIO, creando così a tutti gli effetti una funzione diversa da quella di partenza.

GRAFICO di una FUNZIONE

Ricordiamo che dati due insiemi A e B l'insieme **PRODOTTO CARTESIANO** di A e B, che si indica con $A \times B$, è così definito

$$A \times B = \{ (a,b) : a \in A, b \in B \}$$

cioè è l'insieme di tutte le <u>coppie ORDINATE</u> con primo elemento in A e secondo elemento in B.

ES. 1. Se $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{ ☼, ☾, ☆, ☁ \}$, allora

$A \times B = \{$ (a, ☼), (a, ☾), (a, ☆), (a, ☁), (b, ☼), (b, ☾), (b, ☆), (b, ☁), (c, ☼), (c, ☾), (c, ☆), (c, ☁), (d, ☼) (d, ☾), (d, ☆), (d, ☁) $\}$.

2. Se $A = B = \mathbb{R} \Rightarrow A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ è l'insieme

$\mathbb{R}^2 = \{ (x,y) : x, y \in \mathbb{R} \}$ di tutte le coppie ordinate di numeri reali, ossia il **PIANO CARTESIANO**.

<u>Def.</u> Data una funzione $f: A \to B$, si dice **GRAFICO di f** il <u>SOTTOINSIEME del PRODOTTO CARTESIANO</u> definito da

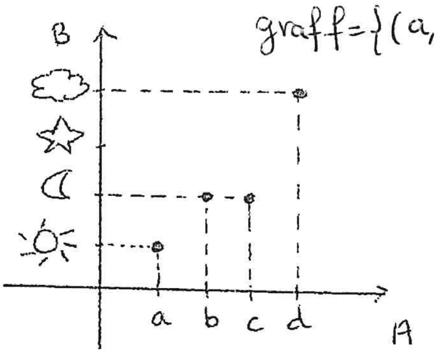
$$\text{graf} f = \{ (a,b) \in A \times B : b = f(a) \}$$

cioè l'insieme di tutte le coppie con $a \in A$ e b immagine di a tramite f.

Il grafico si può visualizzare utilizzando due assi e viene a costituire il "DISEGNO" di f.

Il grafico CONTIENE TUTTE LE INFORMAZIONI sulla funzione f.

ES. 1) $graf\, f = \{(a, ☼), (b, ☾), (c, ☾), (d, ☁)\}$



Visualizzando il grafico è costituito dai quattro punti •

Dal grafico si possono ricavare TUTTE LE INFORMAZIONI sulla FUNZIONE.

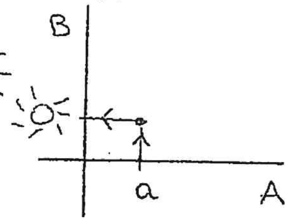
PER DETERMINARE:

IL <u>DOMINIO</u> di f — si deve proiettare il grafico sull'asse A

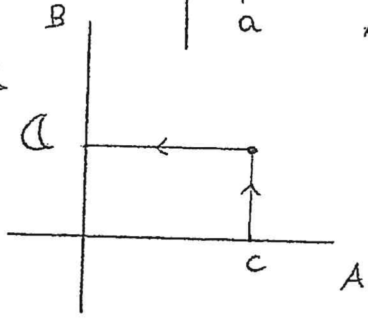
$\Rightarrow dom f = \{a, b, c, d\}$

l'<u>immagine</u> di un elemento di A — si deve seguire la linea fino a B partendo dall'elemento scelto

ad es. $f(a) = ☼$

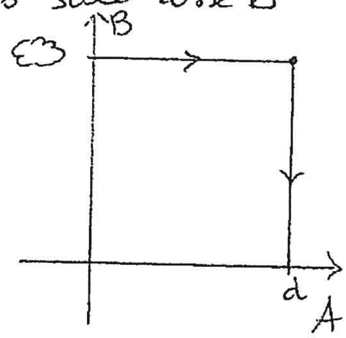


oppure $f(c) = ☾$

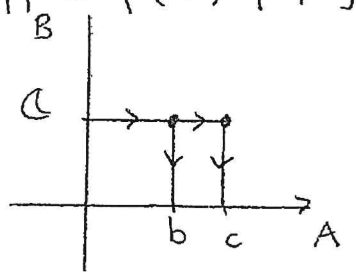


le <u>controimmagini</u> di un elemento $b \in B$ — Si deve seguire la linea che parte dall'elemento scelto sull'asse B e tornare ad A

ad es. $f^{-1}(☁) = \{d\}$



oppure $f^{-1}(☾) = \{b, c\}$



<u>Im f</u> — Si deve proiettare il grafico sull'asse B

$\Rightarrow Im f = \{☼, ☾, ☁\}$

② $f: A \to B$ $A = \{$ studenti della classe $\}$
$B = \{$ stature in cm da 150 cm a 200 cm $\}$

Il prodotto cartesiano $A \times B$ è costituito da tutte le coppie ottenute associando ogni studente con tutte le possibili stature ($A \times B$ sono tutte le possibilità!), mentre graf f è costituito da tutte le coppie ottenute associando ogni studente alla sua esatta statura (cioè solo le coppie con l'immagine giusta, cioè la statura corretta!).

f non è INIETTIVA se esistono almeno due studenti aventi la stessa statura (perché quella statura avrebbe più di 1 controimmagine)

f^{-1}(STATURA) $= \{$ studenti che hanno questa statura $\}$.

f non è SURIETTIVA se esiste almeno una statura $y \in [150\text{ cm}, 200\text{ cm}]$ che non è assunta da nessuno (perché $f^{-1}(y)$ sarebbe $\emptyset$).

Per le FUNZIONI $f: \text{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il GRAFICO di f è il sottoinsieme del piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ definito da

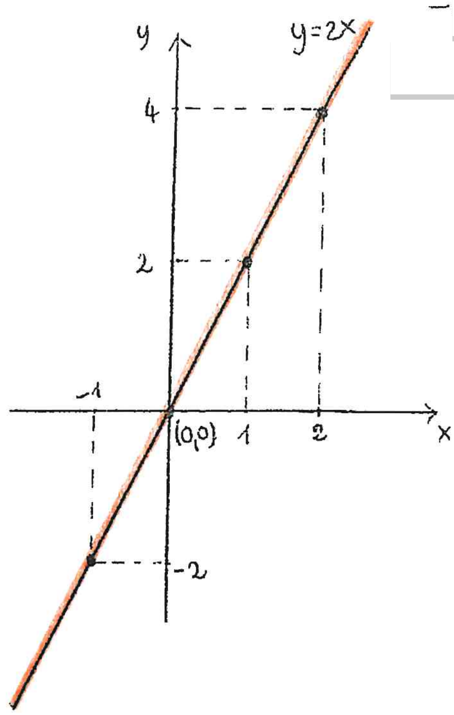
$$\text{graf } f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \text{dom} f,\ y = f(x) \}$$

ossia un OGGETTO GEOMETRICO costituito dai punti (x,y) in cui x e y sono legati dalla funzione f (y è l'immagine di x tramite f).

L'EQUAZIONE del GRAFICO di f è $\boxed{y = f(x)}$.

Il GRAFICO è MOLTO UTILE per visualizzare la funzione e le sue proprietà e non va confuso con la funzione che è una TERNA.

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 2x$



$\mathrm{graf}\, f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$

il grafico di f ha EQUAZIONE $\boxed{y = 2x}$
e rappresenta una retta per $(0,0)$
di coefficiente angolare $m = 2$.

$\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$ (proiettando il grafico sull'asse x si ottiene tutto $\mathbb{R}$)

$f(1) = 2$ $f(2) = 4$ $f(-1) = -2$ $f(0) = 0$

(basta seguire la retta verticale dal valore di x scelto fino al grafico e poi quella orizzontale fino all'asse y)

$f^{-1}(-2) = -1$ $f^{-1}(4) = 2$

(basta seguire la retta orizzontale dal valore di y scelto fino al grafico e poi quella verticale fino all'asse x)

$\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$ (proiettando il grafico sull'asse y si ottiene tutto $\mathbb{R}$)

PER DETERMINARE se f è INIETTIVA e/o SURIETTIVA

dobbiamo studiare il numero delle controimmagini, quindi basta considerare una retta orizzontale $y = k$ e vedere quante volte interseca il grafico. Infatti ad ogni intersezione corrisponde una controimmagine di k.

Quindi

se la retta $y = k$ interseca il grafico $\forall k \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow f$ è SURIETTIVA
(può intersecare il grafico anche più volte)

se la retta $y = k$ interseca il grafico al massimo una volta $\forall k \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow f$ è INIETTIVA
(può anche non intersecare il grafico per certi valori di k)

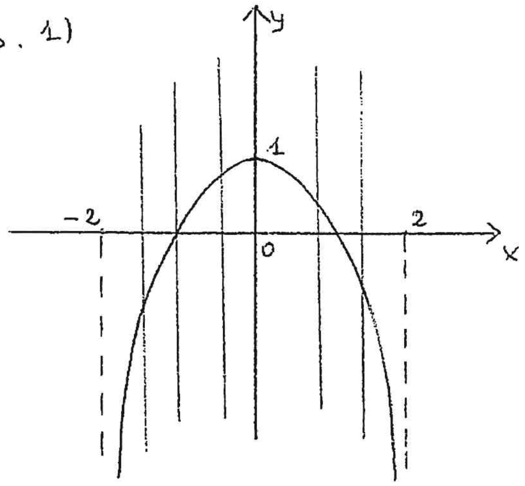
se $\forall K \in \mathbb{R}$ la retta $y=K$ interseca il grafico UNA ed UNA SOLA VOLTA $\Rightarrow$ f è BIUNIVOCA.

La funzione $f(x)=2x$ è BIUNIVOCA da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE - 1) Non si deve confondere la funzione, che è una terna costituita da 2 INSIEMI e 1 LEGGE che dice come calcolare l'immagine di un elemento, con il GRAFICO di f che è UN INSIEME GEOMETRICO. Nel caso di funzioni $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il grafico è una LINEA nel PIANO e ha un'EQUAZIONE data da $y=f(x)$ -

2) Viceversa, data una LINEA nel PIANO ci si può chiedere se SI TRATTI del GRAFICO di una FUNZIONE.

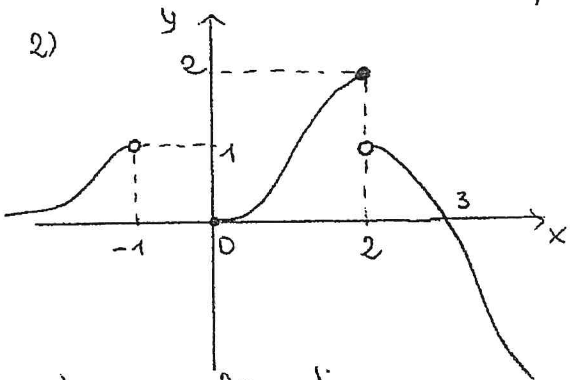
ES. 1)



Se si tratta del grafico di una funzione $\Rightarrow$ $\mathrm{dom} f =]-2,2[$ (proiezione del grafico sull'asse x)

Poi $\forall x \in]-2,2[$ dobbiamo controllare che $\exists !\, f(x)$, quindi basta considerare tutte le rette verticali per un punto del dominio e controllare se intersecano la linea del disegno UNA ed UNA SOLA VOLTA - In questo caso il disegno è il GRAFICO di una funzione f -

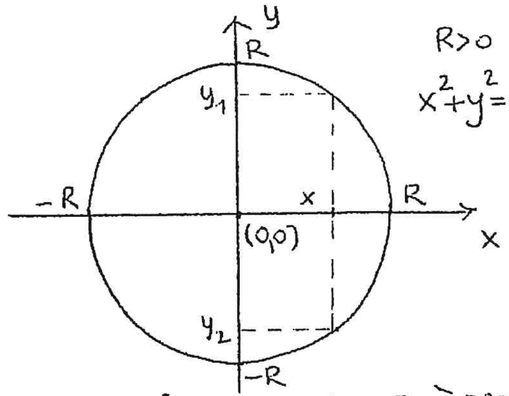
2)



È IL grafico di $f: A \to \mathbb{R}$ con $A = \mathrm{dom} f =]-\infty,-1[\cup [0,+\infty[$

$f(2)=2$

3)



$R>0$

$x^2+y^2=R^2$

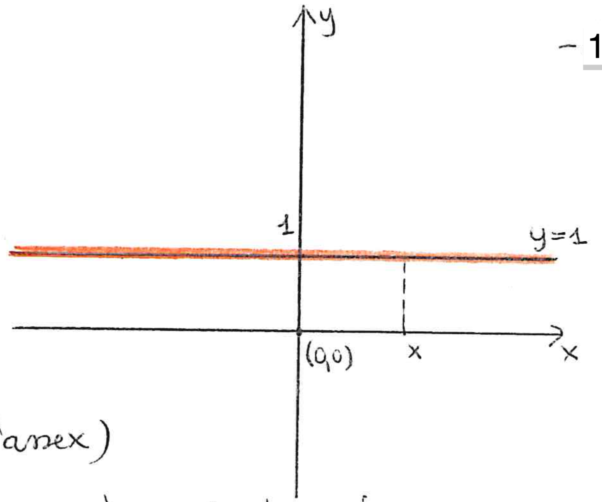
Una circonferenza NON PUÒ ESSERE IL GRAFICO di una funzione $f: [-R,R] \to \mathbb{R}$ perché ogni $x \in]-R,R[$ avrebbe DUE IMMAGINI.

Esempi - 4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 1$ $\forall x$

graf $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\}$

il grafico di f ha EQUAZIONE $y = 1$

che è una RETTA ORIZZONTALE.



dal grafico : dom$f = \mathbb{R}$ (proiezione sull'asse x)

$f(x) = 1$ $\forall x$ Im$f = \{1\}$ (proiezione sull'asse y) da cui

f NON è SURIETTIVA. Si vede che f non è suriettiva anche perchè tutte le rette orizzontali $y = k$ con $k \neq 1$ non intersecano il grafico in nessun punto.

Inoltre f NON è INIETTIVA perchè la retta orizzontale $y = 1$ interseca il grafico in infiniti punti : $f^{-1}(1) = \mathbb{R}$ -

5) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$

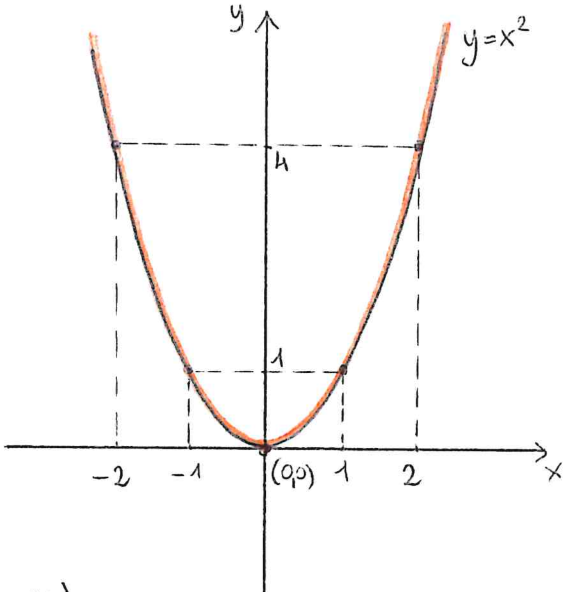
graf $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$

il grafico di f ha equazione $y = x^2$

e rappresenta la parabola di base

($V(0,0)$, verso l'alto, per $(\pm 1, 1)$

$(\pm 2, 4)$ ecc.).



dal grafico : dom$f = \mathbb{R}$ (proiezione sull'asse x)

$f(1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(2) = 4$, $f(-1) = 1$, $f(-2) = 4$ ecc.

Im$f = [0, +\infty[$ (proiezione sull'asse y) $\Rightarrow$ f non è suriettiva.

f non è suriettiva anche perchè le rette orizzontali $y = k$ con $k < 0$ non intersecano il grafico di f.

$f^{-1}(0) = \{0\}$ $f^{-1}(1) = \{-1, 1\}$, $f^{-1}(4) = \{-2, 2\}$, $f^{-1}(k) = \phi$ se $k < 0$

$\Rightarrow$ f non è iniettiva perchè ammette più di una controimmagine o, analogamente, perchè le rette orizzontali $y = k$ con $k > 0$ intersecano il grafico in <u>due</u> punti.