COGNOME ____________________

NOME ____________________

MATRICOLA |_|_|_|_|_|_|

CORSO SEGUITO

NON SCRIVETE QUI

1	2	3	4	5	6

UNIVERSITÀ DI PARMA —

ESAME DI ELEMENTI DI MATEMATICA - TEST 2

A.A. 2019-2020 — PARMA, 27 SETTEMBRE 2019

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo **in stampatello** cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di un'ora e un quarto. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
Svolgete prima i calcoli in brutta, poi svolgete ordinatamente gli esercizi su questo foglio.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo. Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.
Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento** (o traccia dello svolgimento).

TEST PRELIMINARE N.2

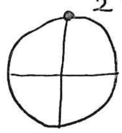
$17^2 = 289 \quad 18^2 = 324 \quad 19^2 = 361$

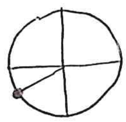
1) Dopo aver disegnato l'angolo corrispondente sul cerchio trigonometrico, calcolate

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = 1 \qquad \cos\left(\frac{19}{6}\pi\right) = -\sqrt{3}/2 \qquad \tan\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\sqrt{3}/3$$

Risposta:

$-\frac{3}{2}\pi$

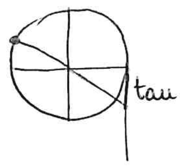




$\frac{7}{6}\pi$

$\frac{19}{6}\pi - 2\pi = \frac{7}{6}\pi$

$\frac{5}{6}\pi$



2) Determinate e disegnate tutte le soluzioni $x \in [0, 2\pi]$ dell'equazione

$$3\operatorname{sen} x - 2\cos^2 x = -3\,.$$

Risposta:

$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow 3\operatorname{sen}x - 2(1-\operatorname{sen}^2 x) + 3 = 0 \quad 2\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen}x + 1 = 0$

$\operatorname{sen}x = t \quad 2t^2 + 3t + 1 = 0 \quad t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4} \nearrow t_1 = -1, \searrow t_2 = -\frac{1}{2}$

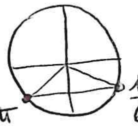
$\operatorname{sen}x = -1$

$x = \frac{3}{2}\pi$

$\frac{3}{2}\pi$

$S = \left\{\frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi\right\}$

$\operatorname{sen}x = -\frac{1}{2}$



$x = \frac{7}{6}\pi, \; x = \frac{11}{6}\pi$

$\frac{7}{6}\pi \quad \frac{11}{6}\pi$

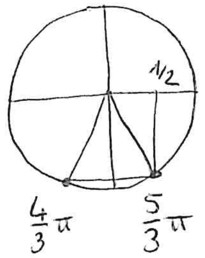
(*) da cui $\cos\theta = \pm\frac{1}{2}$ - Ma essendo $\theta \in]\frac{3}{2}\pi, 2\pi[\Rightarrow \cos\theta > 0$ e quindi $\cos\theta = \frac{1}{2}$. Infine $\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{-\sqrt{3}/2}{1/2} = -\sqrt{3}$.

---

3) Se $\operatorname{sen}\theta = -\sqrt{3}/2$ e $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$, allora:

$\cos\theta = \ldots \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\tan\theta = \ldots -\sqrt{3}$

Risposta:



$\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{4}{3}\pi$ o $\theta = \frac{5}{3}\pi$

essendo $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{5}{3}\pi}$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\tan\theta = -\sqrt{3}$

ALTRO MODO In alternativa senza determinare l'angolo si può calcolare $\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ (*)

---

4) Completate, SPECIFICANDO LE PROPRIETÀ UTILIZZATE NEI VARI PASSAGGI:

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25 \iff \ldots x = -2$ $\qquad$ b) $e^{3x^2-1} = -e \iff \ldots$ nessuna sol.ne

c) $3^{2x-1} = 9^{x^2-2x} \iff x = \ldots \frac{3\pm\sqrt{7}}{2}$ $\qquad$ d) $\frac{\log(x-3)+2}{x^2-1} = 0 \iff x = \ldots 3 + \frac{1}{e^2}$

e) $|e^{-\log 6} - \frac{1}{2}| + \log_{1/3} 9 = \ldots -5/3$

Risposta:

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x)$ $\qquad$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \Rightarrow \boxed{x = -2}$

b) $e^{3x^2-1} = -e < 0$ NON CI SONO SOL.NI $\qquad$ $e^{3x^2-1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

c) $3^{2x-1} = (3^2)^{x^2-2x} \iff 3^{2x-1} = 3^{2x^2-4x}$ $\qquad$ $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$

$\iff 2x - 1 = 2x^2 - 4x \iff 2x^2 - 6x + 1 = 0 \iff \boxed{x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{7}}{2}}$

d) C.E. $\begin{cases} x - 3 > 0 \\ x^2 - 1 \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 3 \\ x \neq \pm 1 \end{cases}$ $x \in]3, +\infty[$ $\qquad$ $\frac{\log(x-3)+2}{x^2-1} = 0 \iff \log(x-3) + 2 = 0$

$\frac{N}{D} = 0 \iff N = 0$ e $D \neq 0$

$\iff \log(x-3) = -2 \iff x - 3 = e^{-2}$

$\iff \boxed{x = 3 + \frac{1}{e^2}} > 3$ accettabile

e) $\left|e^{-\log 6} - \frac{1}{2}\right| + \log_{\frac{1}{3}} 9 = \left|e^{\log\frac{1}{6}} - \frac{1}{2}\right| + \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left|\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right| - 2 =$

$n\log_a b = \log_a b^n$ $\qquad$ $e^{\log x} = x \ \forall x > 0$ $\qquad$ $\log_a a^x = x \ \forall x$

$= \left|-\frac{1}{3}\right| - 2 = \frac{1}{3} - 2 = \boxed{-\frac{5}{3}}$

5) Determinate tutte le soluzioni della seguente disequazione:

$$4x^5 + 16x^4 + 21x^3 + 9x^2 > 0 .$$

Risposta:

$$x^2(4x^3+16x^2+21x+9)>0$$

Decomponiamo il polinomio $P(x)=4x^3+16x^2+21x+9$:

poiché $P(-1)=4(-1)^3+16(-1)^2+21(-1)+9=-4+16-21+9=0$

$P(x)$ è divisibile per $(x+1)$ e

$P(x)=(x+1)(4x^2+12x+9)$.

La diseq.ne diventa $x^2(x+1)(4x^2+12x+9)>0$ DIS.ne prodotto

$F_1 \geq 0$ $\quad x^2>0 \ \forall x \neq 0$

$x^2=0 \quad x=0$

$F_2 \geq 0$ $\quad x+1>0 \quad x>-1$

$x+1=0 \quad x=-1$

$F_3 \geq 0$ $\quad (2x+3)^2>0 \ \forall x \neq -\frac{3}{2}$

$(2x+3)^2=0$ se $x=-\frac{3}{2}$

$$x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36-36}}{4}=-\frac{3}{2}$$

		$-\frac{3}{2}$		-1		0	
F_1	+		+		+	0	+
F_2	−		−	0	+		+
F_3	+	0	+		+		+
$F_1\cdot F_2\cdot F_3$	−	0	−	0	+	0	+

Quindi $F_1\cdot F_2\cdot F_3>0 \iff x\in\,]-1,0[\,\cup\,]0,+\infty[$

$S=\,]-1,0[\,\cup\,]0,+\infty[$

6) Determinate tutte le soluzioni della seguente disequazione:

$$\frac{9x^4 - 19x^2 + 2}{-18 - 13x} < 0\,,$$

(i calcoli di tutti i confronti necessari devono essere svolti senza utilizzare i numeri decimali).

Risposta:

Dis.^{ne} Fratta $\frac{N(x)}{D(x)} < 0$ C.E. $D(x) \neq 0$ $\quad -18 - 13x \neq 0$

$$x \neq -\frac{18}{13}$$

$N(x) = 9x^4 - 19x^2 + 2$ biquadratica

decomponiamo $N(x)$ utilizzando $x^2 = t$

$9t^2 - 19t + 2 = 0 \qquad t_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 72}}{18} = \frac{19 \pm \sqrt{289}}{18} = \frac{19 \pm 17}{18}$

$t_1 = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} \qquad t_2 = \frac{36}{18} = 2$

$9t^2 - 19t + 2 = (9t - 1)(t - 2)$ da cui ricaviamo

$N(x) = (9x^2 - 1)(x^2 - 2) = N_1(x) \cdot N_2(x)$

$N_1(x) \geq 0 \iff 9x^2 - 1 \geq 0 \iff x^2 \geq \frac{1}{9} \iff x \leq -\frac{1}{3}$ o $x \geq \frac{1}{3}$

$9x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm\frac{1}{3}$

$N_2(x) \geq 0 \iff x^2 - 2 \geq 0 \iff x^2 \geq 2 \iff x \leq -\sqrt{2}$ o $x \geq \sqrt{2}$

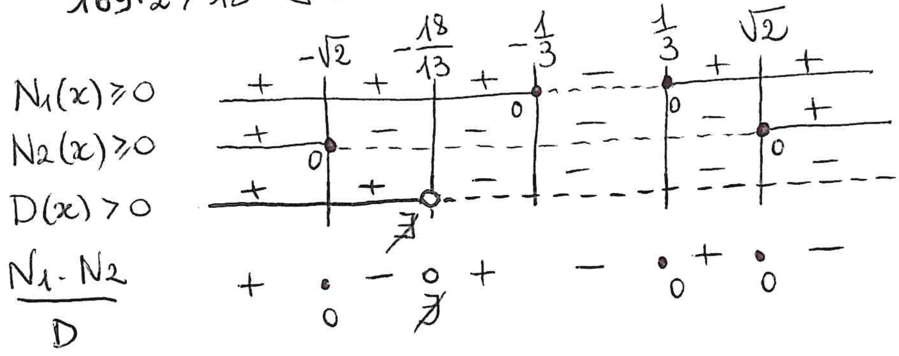
$x^2 - 2 = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}$.

$D(x) > 0 \iff -18 - 13x > 0 \iff x < -\frac{18}{13}$

Confronto $-\sqrt{2}$ e $-\frac{18}{13}$: $-\sqrt{2} \overset{?}{<} -\frac{18}{13} \iff \sqrt{2} > \frac{18}{13} \iff 13\sqrt{2} > 18 \iff$ elevo $(\cdot)^2$ sono entrambi >0

$169 \cdot 2 > 18^2 \iff 338 > 324$ V $\Rightarrow \boxed{-\sqrt{2} < -\frac{18}{13}}$

$-\frac{18}{13} < -\frac{13}{13} = -1 < -\frac{1}{3}$



$$\frac{N_1 \cdot N_2}{D} > 0$$

$$\Updownarrow$$

$x \in \left]-\sqrt{2}, -\frac{18}{13}\right[\cup \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[\cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$

$S = \left]-\sqrt{2}, -\frac{18}{13}\right[\cup \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[\cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$