2ª lezione

DISEQUAZIONI PRODOTTO

Se ad es. consideriamo 3 fattori $F_1(x), F_2(x), F_3(x)$

otteniamo le possibili disequazioni

$$F_1(x) \cdot F_2(x) \cdot F_3(x) \begin{array}{l} >0 \\ \geq 0 \\ <0 \\ \leq 0 \end{array}.$$

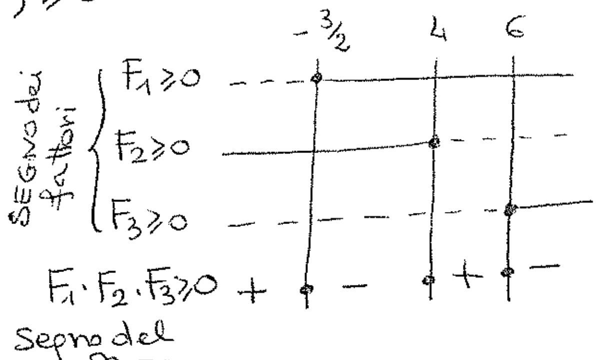
Il SEGNO di un prodotto dipende dal segno dei fattori, pertanto si deve studiare il segno di ogni singolo fattore e poi dedurre il segno del prodotto, controllando uno ad uno i punti che annullano uno dei fattori.

ES. 1) $(2x+3)(4-x)\left(\dfrac{\frac{1}{2}x-3}{2}\right) \geq 0$

$F_1(x) = (2x+3) \geq 0 \quad x \geq -\frac{3}{2}$

$F_2(x) = 4-x \geq 0 \quad x \leq 4$

$F_3(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-3\right) \geq 0 \quad x \geq 6$



Legenda
—— segno +
- - - - segno –
• vale 0
o non è definito

SOL.ni $x \in \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup [4, 6]$

$\left(F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 = 0 \iff x = -\frac{3}{2} \text{ o } x = 4 \text{ o } x = 6\right)$

DISEQUAZIONI FRATTE

Date due espressioni nell'incognita x che definiscono il NUMERATORE $N(x)$ e il DENOMINATORE $D(x)$, otteniamo le possibili disequazioni

$$\frac{N(x)}{D(x)} \begin{array}{l} >0 \\ \geq 0 \\ <0 \\ \leq 0 \end{array}$$

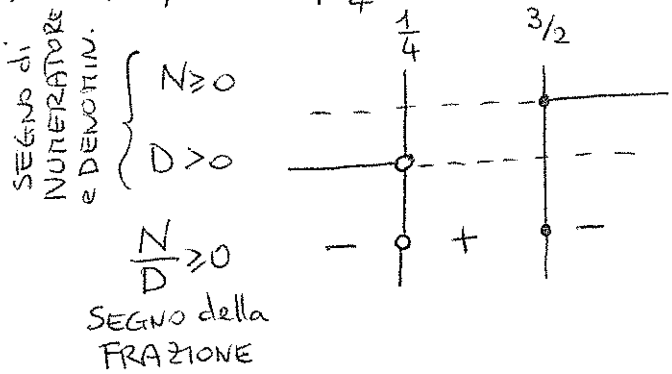
Il segno di una frazione dipende dal segno di numeratore e denominatore, pertanto si deve studiare il segno di $N(x)$ e $D(x)$ e poi dedurre il segno della frazione. E' necessario tenere conto della condizione di esistenza $\boxed{D(x) \neq 0}$ e controllare uno ad uno i punti che annullano $N(x)$.

ES.2) $\dfrac{6x-9}{1-4x} \leq 0$ $D(x) = 1-4x \neq 0$ $x \neq \frac{1}{4}$

$N(x) = 6x-9 \geq 0$ $x \geq \frac{3}{2}$

$D(x) = 1-4x > 0$ $x < \frac{1}{4}$

(non è ammesso che $D(x)=0$)



SOL.^{ni} $x \in \left]-\infty, \frac{1}{4}\right[\cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$

INSIEMI DEFINITI TRAMITE EQUAZIONI o DISEQUAZIONI

Si può definire un insieme considerando le soluzioni di una o più equazioni o disequazioni.

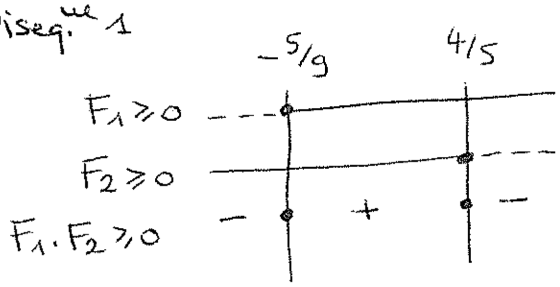
ES.3) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left(\frac{3}{2}x + \frac{5}{6}\right) \cdot (4-5x) \geq 0, \ \dfrac{-x}{5-x} < \dfrac{1+3x}{3x-4} \right\}$

A contiene le soluzioni comuni ad entrambe le disequazioni, pertanto dobbiamo risolverle entrambe e poi intersecare gli insiemi delle soluzioni.

$\left(\frac{3}{2}x + \frac{5}{6}\right)(4-5x) \geq 0$ Diseq.^{ne} 1

$F_1 = \frac{3}{2}x + \frac{5}{6} \geq 0$ $x \geq -\frac{5}{9}$

$F_2 = 4-5x \geq 0$ $x \leq \frac{4}{5}$



SOL.^{ni} $A_1 = \left[-\frac{5}{9}, \frac{4}{5}\right]$

$$\frac{-x}{5-x} < \frac{1+3x}{3x-4} \qquad \text{Diseq.}^{ne}\ 2$$

$$\frac{-x}{5-x} - \frac{1+3x}{3x-4} < 0 \qquad \frac{-x(3x-4)-(1+3x)(5-x)}{(5-x)(3x-4)} < 0$$

$$\frac{\cancel{-3x^2}+4x-5+x-15x+\cancel{3x^2}}{(5-x)(3x-4)} < 0 \qquad \frac{-10x-5}{(5-x)(3x-4)} < 0$$

$D(x) = D_1(x) \cdot D_2(x)$

$D(x) \neq 0$

$\Updownarrow$

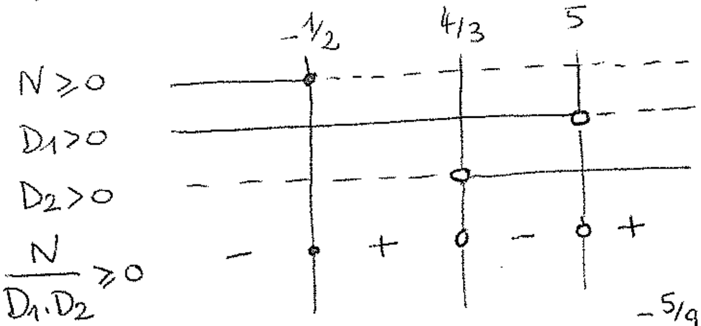
$D_1(x) \neq 0$ e $D_2(x) \neq 0$

$D(x) \neq 0 \iff x \neq 5$ e $x \neq \frac{4}{3}$

$N(x) = -10x - 5 \geq 0 \quad x \leq -\frac{1}{2}$

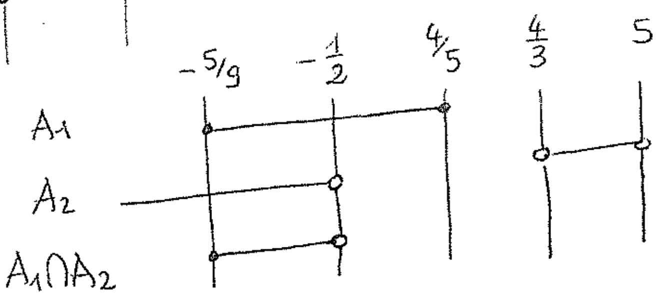
$D_1(x) = 5 - x > 0 \quad x < 5$

$D_2(x) = 3x - 4 > 0 \quad x > \frac{4}{3}$



Sol.^{ni} $A_2 =]-\infty, -\frac{1}{2}[\ \cup\ ]\frac{4}{3}, 5[$

$\boxed{A = A_1 \cap A_2}$



Sol.^{ne}

$A = [-\frac{5}{9}, -\frac{1}{2}[$

DISEQUAZIONI di 2° GRADO

Prima di tutto riflettiamo sulle seguenti disequazioni

$x^2 \geq 0 \qquad x^2 > 0 \qquad x^2 \leq 0 \qquad x^2 < 0$

OSSERVAZIONE. Il quadrato di un numero reale $x \neq 0$ è sempre strettamente positivo ($x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$): ad es. $x = 1 \to x^2 = 1$, $x = -1 \to x^2 = 1$. Se consideriamo come caso particolare $x = 0$ otteniamo $x^2 = 0$. Quindi l'unica possibilità per il quadrato di un numero di valere 0 è che il numero di partenza sia 0, mentre non è mai possibile che il quadrato di un numero sia negativo.

Quindi

- $x^2 \geq 0$ è vera $\forall x \in \mathbb{R}$
- $x^2 > 0$ è vera $\forall x \in \mathbb{R}$, $\underline{x \neq 0}$
- $x^2 \leq 0$ è vera solo se $\underline{x = 0}$
- $x^2 < 0$ non è mai vera.

La stessa cosa vale per il quadrato di qualunque cosa: ad esempio

- $(2x-1)^2 \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$
- $(2x-1)^2 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\underline{x \neq \frac{1}{2}}$ perchè $x = \frac{1}{2}$ è l'unico valore di x per cui $2x-1=0$ e $0^2=0$
- $(2x-1)^2 \leq 0$ solo se $x = \frac{1}{2}$
- $(2x-1)^2 < 0$ mai

e anche con quantità più complicate elevate al quadrato

- $(3x^2+x)^2 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ e $x \neq -\frac{1}{3}$ perchè $3x^2+x = x(3x+1)$ si annulla per $x=0$ o $x = -\frac{1}{3}$.

Consideriamo una generica disequazione di 2° grado:

$$\boxed{ax^2+bx+c \begin{array}{l} \geq 0 \\ > 0 \\ \leq 0 \\ < 0 \end{array}}$$

con $a \neq 0$ (se $a=0 \Rightarrow$ non è più di 2° grado)

Supponiamo $\boxed{a>0}$. Sappiamo che l'equazione associata $ax^2+bx+c=0$ può ammettere 2, 1, 0 soluzioni a seconda del valore del DISCRIMINANTE $\Delta = b^2-4ac$:

$\Delta > 0$ l'eq.ne ammette due sol.ni distinte $x_1 < x_2$

$\Delta = 0$ l'eq.ne ammette una sola sol.ne x_1 con molteplicità 2

$\Delta < 0$ l'eq.ne non ammette nessuna soluzione reale.

Studiamo separatamente i 3 casi

<u>1° caso</u> $\Delta > 0 \Rightarrow ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

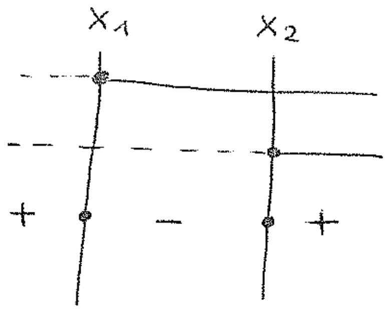
il SEGNO di ax^2+bx+c si può studiare con il procedimento di una diseq.ue prodotto

$a>0$, $x_1 < x_2$

$F_1 = x - x_1 \geq 0 \quad x \geq x_1$

$F_2 = x - x_2 \geq 0 \quad x \geq x_2$

segno di ax^2+bx+c



Otteniamo quindi che ax^2+bx+c è POSITIVO per valori esterni alle due sol.ni dell'eq.ne x_1, x_2 e NEGATIVO per valori compresi tra le due sol.ni

$a>0 \quad \Delta>0$	$x_1 < x_2$
$ax^2+bx+c>0$	per $x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$
$ax^2+bx+c<0$	per $x \in]x_1, x_2[$

ESEMPIO $x^2-4x-5 \geq 0 \quad a=1>0 \quad b=-4 \quad c=-5$

$\Delta = 36 > 0 \quad x_1 = -1 \quad x_2 = 5$

la disequazione è verificata per valori esterni a x_1, x_2 estremi compresi SOL.ne $x \in]-\infty, -1] \cup [5, +\infty[$

<u>2° caso</u> $\Delta = 0 \Rightarrow ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2$

- per quanto già osservato prima sui quadrati
- $a(x-x_1)^2 \geq 0 \quad \forall x$ • $a(x-x_1)^2 > 0 \quad \forall x \neq x_1$
- $a(x-x_1)^2 \leq 0$ solo per $x = x_1$ • $a(x-x_1)^2 < 0$ mai

$a>0$ $\Delta=0$	unica sol.^{ne} x_1
$ax^2+bx+c \geq 0$	$\forall x$
>0	$\forall x \neq x_1$
≤ 0	$x=x_1$
<0	mai

ESEMPIO – $9x^2-6x+1>0$ $\quad \Delta=0 \quad x_1=\frac{1}{3}$

$$9x^2-6x+1=9\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)=9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$$

SOL.^{ne} $\forall x \neq \frac{1}{3}$ (oppure $x \in]-\infty,-\frac{1}{3}[\cup]-\frac{1}{3},+\infty[$)

3° caso $\Delta<0 \Rightarrow ax^2+bx+c$ non si annulla mai

si dimostra che in questo caso ax^2+bx+c è sempre POSITIVO

(si usa il fatto che $ax^2+bx+c=a\left[\underbrace{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}_{\substack{\geq 0 \\ \text{essendo} \\ \text{un } (\,)^2}}\underbrace{-\frac{\Delta}{4a^2}}_{>0 \text{ essendo } \Delta<0}\right]$ da cui

si deduce che

ax^2+bx+c ha sempre il segno coefficiente a)

$a>0$ $\Delta<0$ $ax^2+bx+c \geq 0$	$\forall x$
>0	$\forall x$
≤ 0	mai
<0	mai

ESEMPIO $2x^2-7x+9>0$ $\quad \Delta<0$ $\quad$ SOL.^{ni} $\forall x \in \mathbb{R}$

($a=2>0 \Rightarrow 2x^2-7x+9$ è sempre >0)

OSSERVAZIONE 1 – Se $\boxed{a<0}$ tutto ciò che è stato dimostrato si inverte – Ad esempio

$a<0$ $\quad \Delta>0$ $\quad x_1<x_2$

ax^2+bx+c è POSITIVO per valori interni ($x \in]x_1,x_2[$)

e NEGATIVO per valori esterni ($x \in]-\infty,x_1[\cup]x_2,+\infty[$)

e così via –

Per evitare di doversi ricordare una più ampia casistica si consiglia di

- portare sempre tutto a 1° membro
- ordinare secondo le potenze di x in modo decrescente
- fare in modo che il coefficiente di x^2 sia POSITIVO.

OSSERVAZIONE 2 - Vedremo più avanti che le disequazioni di 2° grado si possono risolvere molto facilmente senza doversi ricordare nulla utilizzando il <u>METODO GRAFICO delle PARABOLE</u>.

SISTEMI di EQUAZIONI e DISEQUAZIONI

Un sistema è un'insieme di condizioni che <u>devono essere tutte contemporaneamente verificate</u>, unite in una parentesi graffa.

ES. 4
$$\begin{cases} 2x-5x^2+3<0 & (1) \\ x^2 \le 4 & (2) \end{cases}$$

Diseq.^{ne} (1) $5x^2-2x-3>0$ di 2° grado

eq.^{ne} associata $5x^2-2x-3=0$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+15}}{5} = \frac{1 \pm 4}{5} \begin{matrix} \nearrow x_1 = -\frac{3}{5} \\ \searrow x_2 = 1 \end{matrix}$$

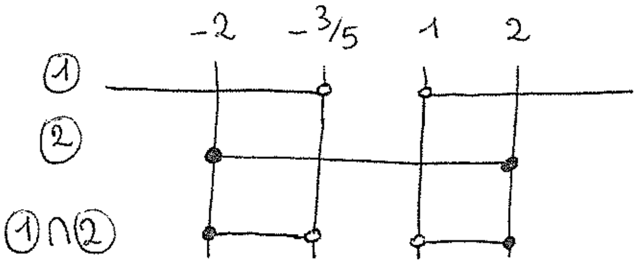
(verifica $(5x+3)(x-1) = 5x^2-2x-3$ ok)

siamo nel caso $\Delta>0$, $x_1<x_2$ - La dis.^{ne} è verificata per valori esterni : SOL.^{ni} (1) $x \in]-\infty, -\frac{3}{5}[\cup]1, +\infty[$

Diseq.^{ne} (2) $x^2 \le 4$ $x^2-4 \le 0$ di 2° grado eq.^{ne} associata $x^2-4=0$

$x^2=4$ $x=\pm 2$ $x_1=-2$ $x_2=2$ - La diseq.^{ne} è verificata per valori interni, estremi compresi : SOL.^{ne} (2) $x \in [-2, 2]$

SOL.^{ne} del SISTEMA = Soluz. (1) $\cap$ Soluz (2)



<u>SOL.^{ni}</u>

$x \in [-2, -\frac{3}{5}[\cup]1, 2]$

ES. 5) $\begin{cases} \dfrac{(-11x-5-2x^2)(x^2-9)}{x^2+2x+1} < 0 & ① \\ x^2+1>0 & ② \end{cases}$

Dis.^{ne} ② $x^2+1 \geq 1$ $\forall x$ (essendo $x^2 \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$) quindi

Sol.^{ni} Dis.^{ne} ② : $\mathbb{R}$

(naturalmente si può anche calcolare che $\Delta < 0$ e quindi x^2+1 ha sempre il segno del primo coefficiente, ossia POSITIVO, da cui $x^2+1>0$ $\forall x \in \mathbb{R}$)

Dis.^{ne} ① $D(x) = x^2+2x+1 = (x+1)^2$ $\quad D(x) \neq 0 \iff x \neq -1$

$N(x) = N_1(x) \cdot N_2(x)$

$N_1(x) = -2x^2-11x-5 \geq 0$ se $2x^2+11x+5 \leq 0$ eq.^{ne} associata

$2x^2+11x+5=0$ $\quad x_{1,2} = \dfrac{-11 \pm \sqrt{121-40}}{4} = \dfrac{-11 \pm 9}{4}$ $\begin{matrix} \nearrow x_1 = -5 \\ \searrow x_2 = -\frac{1}{2} \end{matrix}$

la dis.^{ne} è verificata per valori interni, estremi compresi

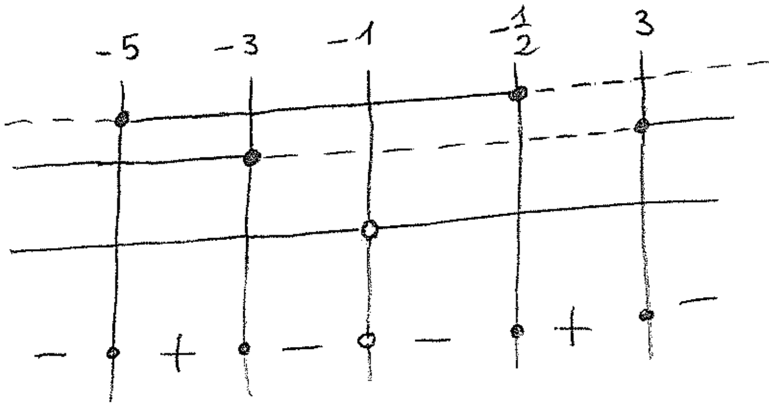
$N_2(x) = x^2-9 \geq 0$ eq.^{ne} associata $x^2-9=0$ $x^2=9$ $x=\pm 3$

la dis.^{ne} è verificata per valori esterni, estremi compresi

$N_1 \geq 0$ $\quad -5 \leq x \leq -\frac{1}{2}$

$N_2 \geq 0$ $\quad x \leq -3$ o $x \geq 3$

$D > 0$ $\quad \forall x \neq -1$



$\dfrac{N_1 \cdot N_2}{D} \geq 0$

SOL.^{ni} Dis.^{ne} ① $\quad x \in \left]-\infty, -5\right[\cup \left]-3, -1\right[\cup \left]-1, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]3, +\infty\right[$

Essendo Dis.^{ne} ② sempre vera, le sol.^{ni} del sistema coincidono con le sol.^{ni} della Dis.^{ne} ① $\Rightarrow$

<u>SOL.^{ni}</u> $\quad x \in \left]-\infty, -5\right[\cup \left]-3, -1\right[\cup \left]-1, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]3, +\infty\right[$