

COGNOME \_\_\_\_\_

NOME \_\_\_\_\_

MATRICOLA 

--	--	--	--	--	--	--	--

NON SCRIVETE QUI

1	2	3	4

5	6	7	8

--

UNIVERSITÀ DI PARMA — C.L. in MATEMATICA

ESAME DI ELEMENTI DI MATEMATICA - Parte teorica

A.A. 2019-2020 — PARMA, 7 OTTOBRE 2019

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo **in stampatello** cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di quarantacinque minuti. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

Svolgete prima i calcoli in brutta, poi svolgete ordinatamente gli esercizi su questo foglio

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo. Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento**.

1) Negate la seguente proposizione

$$\forall y < -2 \quad \forall x \geq 1 \quad \exists z > 0 : \quad [ P(x, y, z) \vee Q(x, y, z) ]$$

Risposta: ...  $\exists y < -2 \quad \exists x \geq 1 : \forall z > 0 \quad \text{NON } P(x, y, z) \wedge \text{NON } Q(x, y, z)$

2) Date la definizione di **insieme unione** e completate:

$$A \cup B = \dots \{ x : x \in A \vee x \in B \}$$

$$x \notin A \cup B \iff \dots x \notin A \wedge x \notin B$$

3) Completate correttamente la disequaglianza:

$$b < a < 0 \iff -a^2 \quad \dots \quad -b^2$$

riportando tutti i passaggi.

Risposta: ...  $b < a < 0 \iff 0 < a^2 < b^2 \iff -b^2 < -a^2 < 0$

4) Dimostrate la legge sulla quale si basa il principio della dimostrazione per assurdo.

Risposta: ...  $[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [\text{NON } B \Rightarrow \text{NON } A]$

dim.  $[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [\text{NON } A \circ B] \xleftarrow{\text{sono =}}$   
 $[\text{NON } B \Rightarrow \text{NON } A] \Leftrightarrow [\text{NON}(\text{NON } B) \circ \text{NON } A]$   
 $\Leftrightarrow [B \circ \text{NON } A] \Leftrightarrow [\text{NON } A \circ B] \xleftarrow{\text{proprietà commutativa di } \circ}$   
 $\downarrow$   
 $\text{NON}(\text{NON } B) \Leftrightarrow B$

5) Scrivete la definizione precisa di funzione iniettiva per una funzione  $f : \text{dom } f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e anche la sua negazione.

Risposta: ... Def.  $\forall x_1, x_2 \in \text{dom } f \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Negazione:  $\exists x_1, x_2 \in \text{dom } f : (x_1 \neq x_2) \wedge (f(x_1) = f(x_2))$

6) Dimostrate (con tutti i passaggi e le proprietà utilizzate) la formula seguente:

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$

Dimostrazione: ...  $x \in (A \cup B) \setminus C \stackrel{\text{Def. di differenza}}{\Leftrightarrow} [x \in (A \cup B)] \wedge x \notin C$

$\stackrel{\text{Def. di } \cup}{\Leftrightarrow} [x \in A \vee x \in B] \wedge x \notin C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [x \in A \wedge x \notin C] \vee [x \in B \wedge x \notin C]$   
proprietà distributiva di  $\wedge$  rispetto ad  $\vee$

$\Leftrightarrow (x \in A \setminus C) \vee (x \in B \setminus C) \stackrel{\text{Def. di } \cup}{\Leftrightarrow} x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

Def. di Differenza

Def di  $\cup$

7) Considerate i tre predicati:

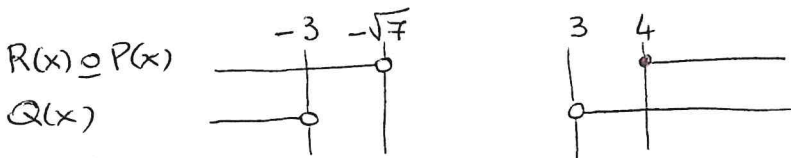
$$P(x) : |x| \geq 4 \quad Q(x) : \frac{x^2 - 9}{x^2 + 1} > 0 \quad R(x) : x < -\sqrt{7}.$$

a) Dopo aver determinato quali valori di  $x$  rendono vera la proposizione  $P(x)$  e quali rendono vera  $Q(x)$ , dite (motivando la risposta) se è VERA o FALSA la seguente proposizione

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad [R(x) \circ P(x)] \Rightarrow Q(x).$$

Risposta: ...  $P(x)$  "  $x \leq -4 \cup x \geq 4$  "  $Q(x)$  "  $x < -3 \cup x > 3$  "

$$R(x) \circ P(x) \text{ " } x < -\sqrt{7} \cup x \geq 4 \text{ " } \quad -\sqrt{7} > -\sqrt{9} = -3 > -4$$



La Proposizione è FALSA perché per  $x \in [-3, -\sqrt{7}[$  risulta  $R(x) \circ P(x)$  VERA e  $Q(x)$  FALSA

b) Scrivete prima la negazione teorica della proposizione assegnata, poi la negazione esplicita, infine rispondete alle domande.

Negazione teorica: ...  $\exists x \in \mathbb{R} : (R(x) \circ P(x)) \notin (\text{NON } Q(x))$

Negazione esplicita: ...  $\exists x \in \mathbb{R} : [x < -\sqrt{7} \cup x \geq 4] \notin [-3 \leq x \leq 3]$

Vera o falsa? ... VERA

Per quali valori di  $x$ ? ... Tutti gli  $x \in [-3, -\sqrt{7}[$  rendono vere entrambe, sia  $[x < -\sqrt{7} \cup x \geq 4]$ , sia  $[-3 \leq x \leq 3]$ .

8) Date due funzioni  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$  dimostrate che se  $f$  e  $g$  sono suriettive allora la composizione delle due funzioni è anch'essa una funzione suriettiva.

Dimostrazione: ... IP  $f$  suriettiva  $\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b$   
 $g$  suriettiva  $\forall c \in C \exists b \in B : g(b) = c$

TESI  $g \circ f$  è suriettiva  $\forall c \in C \exists a \in A : (g \circ f)(a) = c$   
 $g \circ f : A \rightarrow C$

Sia  $c \in C \stackrel{\text{IP}}{=} \exists b \in B : g(b) = c$  per IP  $f$  è suriettiva quindi dato  $b \in B \exists a \in A : f(a) = b$   
 $g$  SURIETT

$\Rightarrow \exists a \in A : g(f(a)) = g(b) = c \Leftrightarrow \exists a \in A : (g \circ f)(a) = c.$   
 def. di  
 composizione

□