COGNOME ____________ NOME ____________ MATRICOLA	NON SCRIVETE QUI 1 2 3 4 5 6 7

UNIVERSITÀ DI PARMA — C.L. in MATEMATICA

ESAME DI ELEMENTI DI MATEMATICA - Parte teorica

A.A. 2019-2020 — PARMA, 11 OTTOBRE 2019

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo **in stampatello** cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di quarantacinque minuti. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

Svolgete prima i calcoli in brutta, poi svolgete ordinatamente gli esercizi su questo foglio.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo. Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento.**

---

1) Negate la seguente proposizione

$$\forall\, \mathbf{y} > \mathbf{0} \quad \exists\, \mathbf{x} > \mathbf{1} : \qquad [\,\mathbf{P(x,y)} \iff \mathbf{Q(x,y)}\,]$$

Risposta: ... $\exists y>0 : \forall x>1 \ [P(x,y) \ \underline{E} \ \text{NON}\ Q(x,y)] \ \underline{O} \ [Q(x,y) \ \underline{E} \ \text{NON}\ P(x,y)]$

2) Date la definizione di **insieme differenza** e completate:

$A \setminus B \quad = \quad \ldots \{x : x \in A \ \underline{E} \ x \notin B\}$

$x \notin A \setminus B \quad \iff \quad x \notin A \ \underline{O} \ x \in B$

3) Completate correttamente la diseguaglianza:

$$0 < a < b < c \quad \iff \quad \frac{1}{c-a} \ \ldots < \ldots \ \frac{1}{c-b}$$

riportando e giustificando tutti i passaggi.

Risposta: ...

$0<a<b<c \underset{\text{cambio segno}}{\iff} -c<-b<-a<0 \underset{+c}{\iff} 0<c-b<c-a<c$

$\underset{\text{passo al RECIPROCO}}{\iff} 0<\frac{1}{c}<\frac{1}{c-a}<\frac{1}{c-b}$

usando la proprietà $0<x<y \iff 0<\frac{1}{y}<\frac{1}{x}$ poichè $c-a>0$, $c-b>0$, $c>0$

4) Scrivete la definizione precisa di funzione strettamente decrescente per una funzione $f : \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e poi la negazione di tale definizione.

Risposta: ...

Def. $\forall x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Negazione $\exists x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f \; : \; (x_1 < x_2) \; \underline{E} \; (f(x_1) \le f(x_2))$

5) Dimostrate (con tutti i passaggi e le proprietà utilizzate) la formula relativa al complementare dell'unione:

$(A \cup B)^c = \ldots A^c \cap B^c$

Dimostrazione: ... due insiemi E, F sono uguali se: $E = F \Leftrightarrow \forall x \quad x \in E \Leftrightarrow x \in F$

$\boxed{x \in (A\cup B)^c} \underset{\text{Def. di Complementare}}{\Leftrightarrow} x \notin (A \cup B) \underset{\text{Def di } \notin}{\Leftrightarrow} \text{NON}(x \in A \cup B) \Leftrightarrow$

$\underset{\text{Def di } \cup}{\Leftrightarrow} \text{NON}(x \in A \; \underline{o} \; x \in B) \underset{\text{Negazione di } \underline{o}}{\Leftrightarrow} \text{NON}(x \in A) \; \underline{E} \; \text{NON}(x \in B) \underset{\text{Def } \notin}{\Leftrightarrow}$

$x \notin A \; \underline{E} \; x \notin B \underset{\text{Def Complem}}{\Leftrightarrow} x \in A^c \; \underline{E} \; x \in B^c \underset{\text{Def } \cap}{\Leftrightarrow} \boxed{x \in A^c \cap B^c}$

6) Date due funzioni $f : A \to B$, $g : B \to C$ dimostrate che se la composizione di f e g è una funzione iniettiva allora la funzione f è anch'essa iniettiva.

Dimostrazione: ...

IP $g \circ f : A \to C$ è iniettiva cioè $\forall a_1, a_2 \in A \quad (g\circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \Downarrow a_1 = a_2$

Tesi $f : A \to B$ è iniettiva cioè

$\forall a_1, a_2 \in A \quad f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

Quindi consideriamo $a_1, a_2 \in A$ con $f(a_1) = f(a_2)$

$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \underset{\text{Def Composizione}}{\Leftrightarrow} (g \circ f)(a_1) = (g\circ f)(a_2)$

g è una FUNZIONE e $f(a_1) = f(a_2) \in B$

$\Downarrow$ IPOTESI

$a_1 = a_2$

e dunque f è INIETTIVA.

7) Considerate i due predicati:

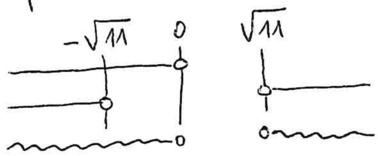
$$\mathrm{P(x)} : [\, x < 0 \ \text{ o } \ x^2 > 11 \,] \qquad \mathrm{Q(x)} : [\, \sqrt{x} \leq 2 \,] \, .$$

a) Dopo aver determinato quali valori di x rendono vera la proposizione $\mathrm{P(x)}$ e quali rendono vera $\mathrm{Q(x)}$, dite (motivando la risposta) se è VERA o FALSA la seguente proposizione

$$\forall \mathrm{x} \in \mathbf{R} \qquad \mathrm{P(x)} \ \text{ o } \ \mathrm{Q(x)} \ .$$

Risposta: ... $P(x)$: $x<0$ o $(x<-\sqrt{11}$ o $x>\sqrt{11})$ quindi

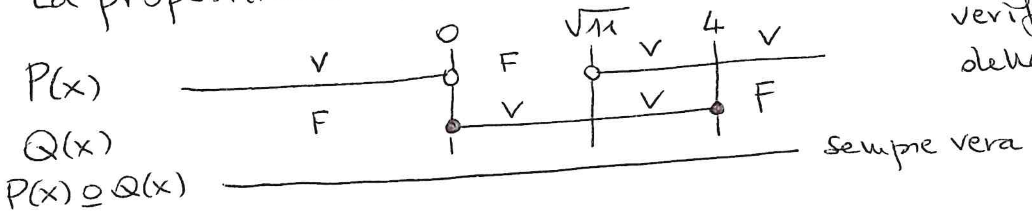
$P(x)$: $\boxed{x<0 \text{ o } x>\sqrt{11}}$



$Q(x)$: $\sqrt{x} \leq 2 \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 4 \end{cases} \iff \boxed{0 \leq x \leq 4}$

$\sqrt{11} < \sqrt{16} = 4$

La proposizione $\forall x \in \mathbb{R}$ $P(x)$ o $Q(x)$ è VERA perchè ogni $x \in \mathbb{R}$ verifica almeno una delle due



b) Scrivete prima la negazione teorica della proposizione assegnata, poi la negazione esplicita, infine rispondete alle domande.

Negazione teorica: ... $\exists x \in \mathbb{R}$: $(\mathrm{Non}\, P(x))$ e $(\mathrm{Non}\, Q(x))$

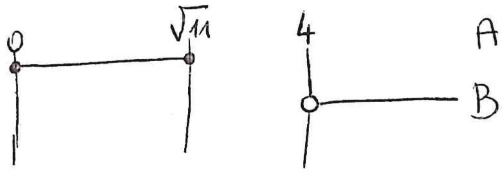
$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2 > 0 \\ x > 4 \end{cases}$

Negazione esplicita: ... $\exists x \in \mathbb{R}$: $(x \geq 0$ e $x^2 \leq 11)$ e $(\sqrt{x} > 2)$

$\exists x \in \mathbb{R}$: $(0 \leq x \leq \sqrt{11})$ e $x > 4$

Vera o falsa? ... È falsa

Perché? I due insiemi $\underset{A}{[0, \sqrt{11}]}$ e $B =]4, +\infty[$ sono DISGIUNTI, pertanto non esiste nessun x che appartenga ad entrambi



$A \cap B = \emptyset$