SOLUZIONE

1) $P(x) = 3x^3 + 8x^2 + 3x - 2 \qquad P(-1) = -3 + 8 - 3 - 2 = 0 \qquad x_0 = -1$ è sol.^{ne}

$\Rightarrow \; P(x) = (x+1)(3x^2 + 5x - 2)$

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 + 8x^2 + 3x - 2 & x+1 \\ \hline 3x^3 + 3x^2 & 3x^2 + 5x - 2 \\ \hline = \; 5x^2 + 3x - 2 & \\ \;\;\; 5x^2 + 5x & \\ \hline = \; -2x - 2 & \\ \;\;\; -2x - 2 & \\ \hline = & \end{array}$$

$3x^2 + 5x - 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} \begin{array}{l} \nearrow -2 \\ \searrow \frac{1}{3} \end{array}$$

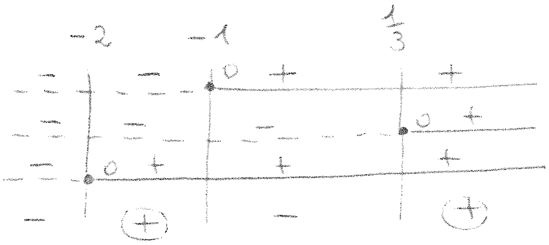
Quindi

$P(x) = (x+1)(3x-1)(x+2) \geq 0$

$F_1 = x + 1 \geq 0 \qquad x \geq -1$

$F_2 = (3x - 1) \geq 0 \qquad x \geq \frac{1}{3}$

$F_3 = x + 2 \geq 0 \qquad x \geq -2$



$P(x) \geq 0 \iff -2 \leq x \leq -1$ o $x \geq \frac{1}{3}$ $\quad S_1 \quad x \in [-2, -1] \cup [\frac{1}{3}, +\infty[$

$\log(11x^3) - \log(4x^2) < 0 \qquad$ C.E. $\begin{cases} 11x^3 > 0 \\ 4x^2 > 0 \end{cases} \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \qquad$ C.E. $\boxed{x > 0}$

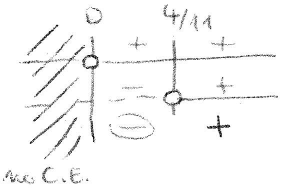
$\log(11x^3) < \log(4x^2)$

$\Updownarrow$ log è strettamente crescente

$11x^3 < 4x^2 \iff 11x^3 - 4x^2 < 0 \iff x^2(11x - 4) < 0$

$x^2 > 0 \qquad x \neq 0$

$11x - 4 > 0 \qquad x > \frac{4}{11}$



$S_2 \qquad 0 < x < \frac{4}{11}$

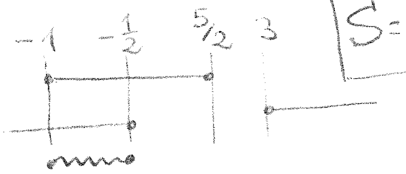
$x \in]0, \frac{4}{11}[$.

$S = S_1 \cap S_2 \quad : \quad \frac{4}{11} > \frac{1}{3} \iff 12 > 11$ vero

$\Rightarrow \boxed{S = [\frac{1}{3}, \frac{4}{11}[}$.

2) a) $|2x^2 - 4x - 4| \leq 1 - x \iff x - 1 \leq 2x^2 - 4x - 4 \leq 1 - x$

$\iff \begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x - 3 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \leq x \leq \frac{5}{2} \\ x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq 3 \end{cases}$



$\boxed{S = [-1, -\frac{1}{2}]}$

$2x^2 - 3x - 5 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{3 \pm 7}{4} \quad \begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{5}{2} \end{array}$

$2x^2 - 5x - 3 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{4} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = -\frac{1}{2} \\ \searrow x_2 = 3 \end{array}$

b) $\sqrt{4x^2+7x-2} > 2x-3 \iff \begin{cases} 4x^2+7x-2\ge 0 \\ 2x-3<0\end{cases}$ o $\begin{cases}4x^2+7x-2\ge 0\\ 2x-3\ge 0\\ \cancel{4x^2}+7x-2 \ge \cancel{4x^2}-12x+9\end{cases}$

$4x^2+7x-2=0 \quad x_{1,2}=\frac{-7\pm 9}{8} \nearrow x_1=-2 \quad \searrow x_2=\frac{1}{4}$

$\iff \begin{cases} x\le -2 \text{ o } x\ge \frac14 \\ x<3/2\end{cases}$ o $\begin{cases} x\le -2 \text{ o } x\ge\frac14 \\ x\ge \frac32 \\ 19x\ge 11\end{cases} \iff x\in\,]-\infty,-2]\cup[\frac14,\frac32[$ o

o $\begin{cases} x\le -2 \text{ o } x\ge\frac14 \\ x\ge\frac32 \\ x\ge\frac{11}{19}\end{cases} \iff x\in\,]-\infty,-2]\cup[\frac14,\frac32[$ o $x\in[\frac32,+\infty[$

$\iff \underbrace{\boxed{x\in\,]-\infty,2]\cup[\frac14,+\infty[}}_{S}$

$\frac14<\frac12<\frac{11}{19}<1<\frac32$

$\downarrow$

$19<22$

c) $e^{3x+2}=5e^{x-\log 5}$ c.e. $\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad e^{3x+2}=5\cdot e^x\cdot e^{-\log 5}$ $\quad (e^{a+b}=e^a\cdot e^b)$

$\iff e^{3x+2}=5\cdot e^x\cdot\frac{1}{5} \iff e^{3x+2}=e^x \underset{e^x \text{ è INIETTIVA}}{\iff} 3x+2=x \iff 2x=-2 \iff \boxed{x=-1}$

$(e^{-\log 5}=e^{\log\frac15}=\frac15)$

$e^{\log x}=x \ \forall x>0$

d) $\log_{\frac13}(x^2-3)>0$ c.e. $x^2-3>0 \iff x<-\sqrt3$ o $x>\sqrt3$ $\quad x\in\,]-\infty,-\sqrt3[\cup]\sqrt3,+\infty[$

$-\log_3(x^2-3)>0 \iff \log_3(x^2-3)<0 \iff (0<)\,x^2-3<1 \iff x^2<4$

$(\log_{\frac1a}x=-\log_a x) \quad \iff -2<x<2$

$\boxed{S=\,]-2,-\sqrt3[\cup]\sqrt3,2[}$

3) a) • $(\sqrt2\cos x+1)\cdot(2\,\mathrm{sen}\,x-1)=0 \iff \cos x=-\frac{1}{\sqrt2}=-\frac{\sqrt2}{2}$ o $\mathrm{sen}\,x=\frac12$

$\iff (x=\frac34\pi$ o $x=\frac54\pi)$ o $(x=\frac{\pi}{6}$ o $x=\frac56\pi)$ $\quad \boxed{S=\{\frac{\pi}{6},\frac34\pi,\frac56\pi,\frac54\pi\}}$

• $\mathrm{sen}^2x+\frac52\cos x-2=0 \quad 1-\cos^2x+\frac52\cos x-2=0 \quad \cos^2x-\frac52\cos x+1=0$

$t=\cos x \quad t^2-\frac52 t+1=0 \quad 2t^2-5t+2=0 \quad t_{1,2}=\frac{5\pm3}{4} \begin{matrix} t_1=\frac12 \\ t_2=2\end{matrix}$

$\Longleftarrow$ $\cos x = \frac{1}{2}$ o $\cos x = 2$ $\Longleftrightarrow$ $x = \frac{\pi}{3}$ o $x = \frac{5}{3}\pi$ $\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi\right\}}$

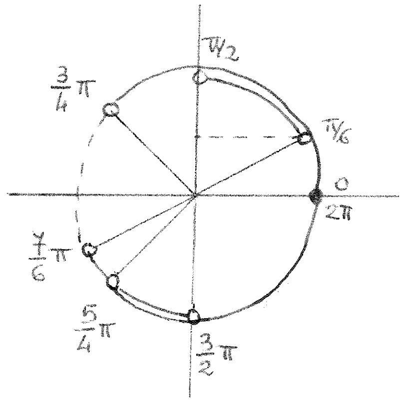
$\downarrow$

> 1 nessuna sol.^{ne} $-1 \leq \cos x \leq 1 \ \forall x$

b) $\alpha \in \left]\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right[$ $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{sen}\alpha < 0 \Longrightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$,

quindi $\boxed{\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 2\left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}}$.

c) $\begin{cases} \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2} \ \text{o} \ \frac{7}{6}\pi < x < \frac{3}{2}\pi & \tan x > \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 \leq x < \frac{3}{4}\pi \ \text{o} \ \frac{5}{4}\pi < x \leq 2\pi & \cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$



$$\boxed{S = \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi\right[}$$

4) Separiamo i n.^{i} positivi dai negativi:

<0 $\quad -2 \quad -\frac{19}{9} \quad -3 \quad -\frac{37}{18}$

>0 $\quad 5-\sqrt{20} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{1}{2}$

$5-\sqrt{20} > 5-\sqrt{25} = 0$

$\downarrow$

$\sqrt{20} < \sqrt{25} \Longleftrightarrow -\sqrt{20} > -\sqrt{25}$

Sia $-\frac{19}{9}$ sia $-\frac{37}{18} \in \left]-3, -2\right[$:

$-3 = -\frac{27}{9} < -\frac{19}{9} < -\frac{18}{9} = -2$ $\qquad \underbrace{-\frac{54}{18}}_{=-3} < -\frac{37}{18} < -\frac{36}{18} = -2$

quindi confrontiamo $-\frac{19}{9} \overset{?}{<} -\frac{37}{18} \Longleftrightarrow \frac{19}{9} > \frac{37}{18} \cdot 2 \Longleftrightarrow 38 > 37$ Vero

$\Longrightarrow -\frac{19}{9} < -\frac{37}{18}$.

Nei positivi $\frac{1}{2} < \frac{4}{5}$ $(5<8)$. Confrontiamo $5-\sqrt{20} \overset{?}{>} \frac{1}{2} \Longleftrightarrow$

$\sqrt{20} < 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \Longleftrightarrow 2\sqrt{20} < 9 \underset{(\cdot)^2}{\Longleftrightarrow} 80 < 81$ Vero. Allora dobbiamo

sono entrambi >0

confrontare anche con $\frac{4}{5}$

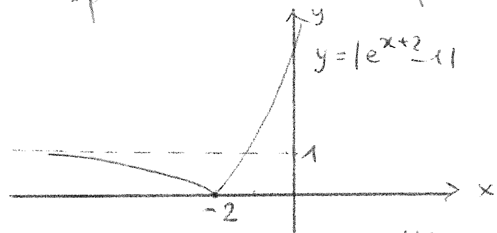
$5-\sqrt{20} \overset{?}{>} \frac{4}{5} \Longleftrightarrow \sqrt{20} < 5 - \frac{4}{5} = \frac{21}{5} \Longleftrightarrow 5\sqrt{20} < 21 \Longleftrightarrow \underbrace{25 \cdot 20}_{500} < 441$ Falso.

L'ordinamento è dunque:

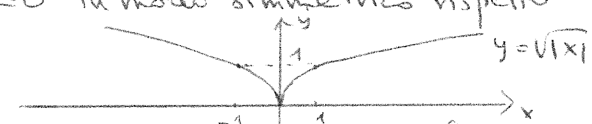
$$\boxed{-3 \quad -\frac{19}{9} \quad -\frac{37}{18} \quad -2 \quad \frac{1}{2} \quad 5-\sqrt{20} \quad \frac{4}{5}}$$

5) a) <u>1° tratto</u> $y=|e^{x+2}-1|$ per $x\le -2$ C.E. $\mathbb{R}$ <u>costruzione</u>: $y=e^{x+2}$ è il grafico dell'esponenziale $y=e^x$ spostato a sinistra di 2, poi $y=e^{x+2}-1$ in basso di 1 ed infine $y=|e^{x+2}-1|$ si considera il $|\cdot|$ lasciando inalterata la parte di grafico con $y\ge 0$ e riflettendo rispetto all'asse x la parte di grafico con $y<0$.

Passa per $(-4,1-\frac{1}{e^2})$, $(-3,1-\frac{1}{e})$, $(-2,0)$.



<u>2° tratto</u> $y=\sqrt{|x|}$ per $-2<x\le 2$ C.E. $|x|\ge 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ il grafico si ottiene dal grafico della radice $y=\sqrt{x}$ estendendo per $x\le 0$ in modo simmetrico rispetto all'asse x ($x=\pm 1$ $y=1$, $x=\pm 2$ $y=\sqrt{2}$).



<u>3° tratto</u> $y=-\log(x-2)$ C.E. $x>2$ si ottiene dal grafico del logaritmo $y=\log x$ spostato a destra di 2 e simmetrizzato rispetto all'asse x. Passa per $(2+\frac{1}{e^2},2)$, $(2+\frac{1}{e},1)$, $(3,0)$, $(2+e,-1)$, $(2+e^2,-2)$.

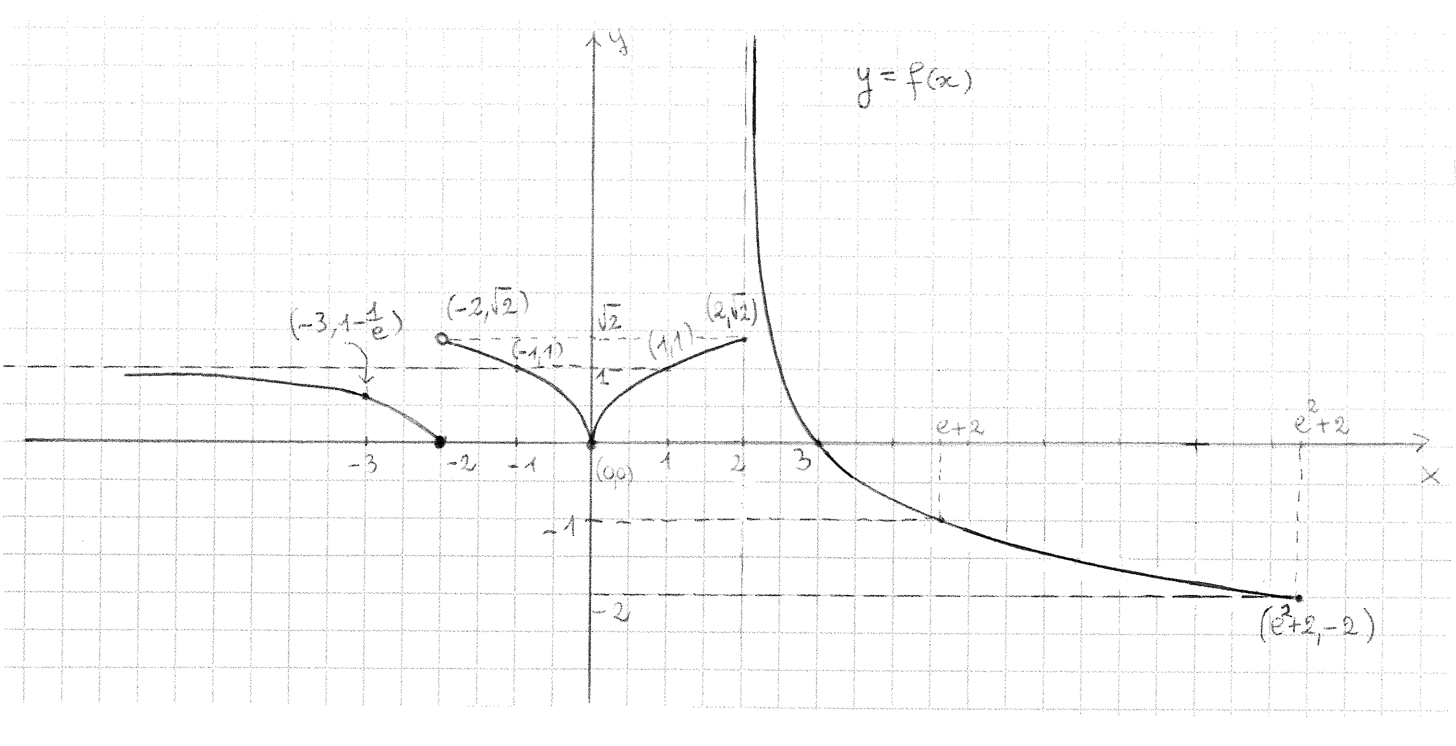
dom f $=]-\infty,e^2+2]$ Im f $=[-2,+\infty[$ $f^{-1}(1)=\{-1,1,2+\frac{1}{e}\}$ $f^{-1}(\frac{1}{2})=\{-\frac{1}{4},+\frac{1}{4},-2-\log 2,2+\frac{1}{\sqrt{e}}\}$

$\sqrt{|x|}=1>0$ elevo $(\cdot)^2$ $|x|=1$ $x=\pm 1$ $-\log(x-2)=1$ $\log(x-2)=-1$ $x-2=\frac{1}{e}$ $x=2+\frac{1}{e}$

$\sqrt{|x|}=\frac{1}{2}>0$ elevo $(\,)^2$ $|x|=\frac{1}{4}$ $x=\pm\frac{1}{4}$ $|e^{x+2}-1|=\frac{1}{2}$ $e^{x+2}-1=\frac{1}{2}$ $e^{x+2}=\frac{3}{2}$

$x+2=\log\frac{3}{2}$ $x=-2+\log\frac{3}{2}>-2$ non accett. $e^{x+2}-1=-\frac{1}{2}$ $e^{x+2}=\frac{1}{2}$ $x+2=\log\frac{1}{2}=-\log 2$

$x=-2-\log 2<-2$ $-\log(x-2)=\frac{1}{2}$ $\log(x-2)=-\frac{1}{2}$ $x-2=\frac{1}{\sqrt{e}}$ $x=2+\frac{1}{\sqrt{e}}$



b) $\text{dom} f = \mathbb{R}$ eq.$^{\text{ne}}$ del grafico $y = \left| -\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{16}{3} \right|$

Disegno la parabola $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{16}{3}$ e poi ne prendo il $|\cdot|$, cioè lascio inalterata la parte di grafico avente $y \geq 0$ e rifletto rispetto all'asse x la parte di grafico con $y < 0$.

La parabola ha $V(2,6)$: $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{2/3}{-\frac{1}{3}} = 2$

$y_V = -\frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{4}{3} + \frac{16}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{20}{3} = \frac{18}{3} = 6$

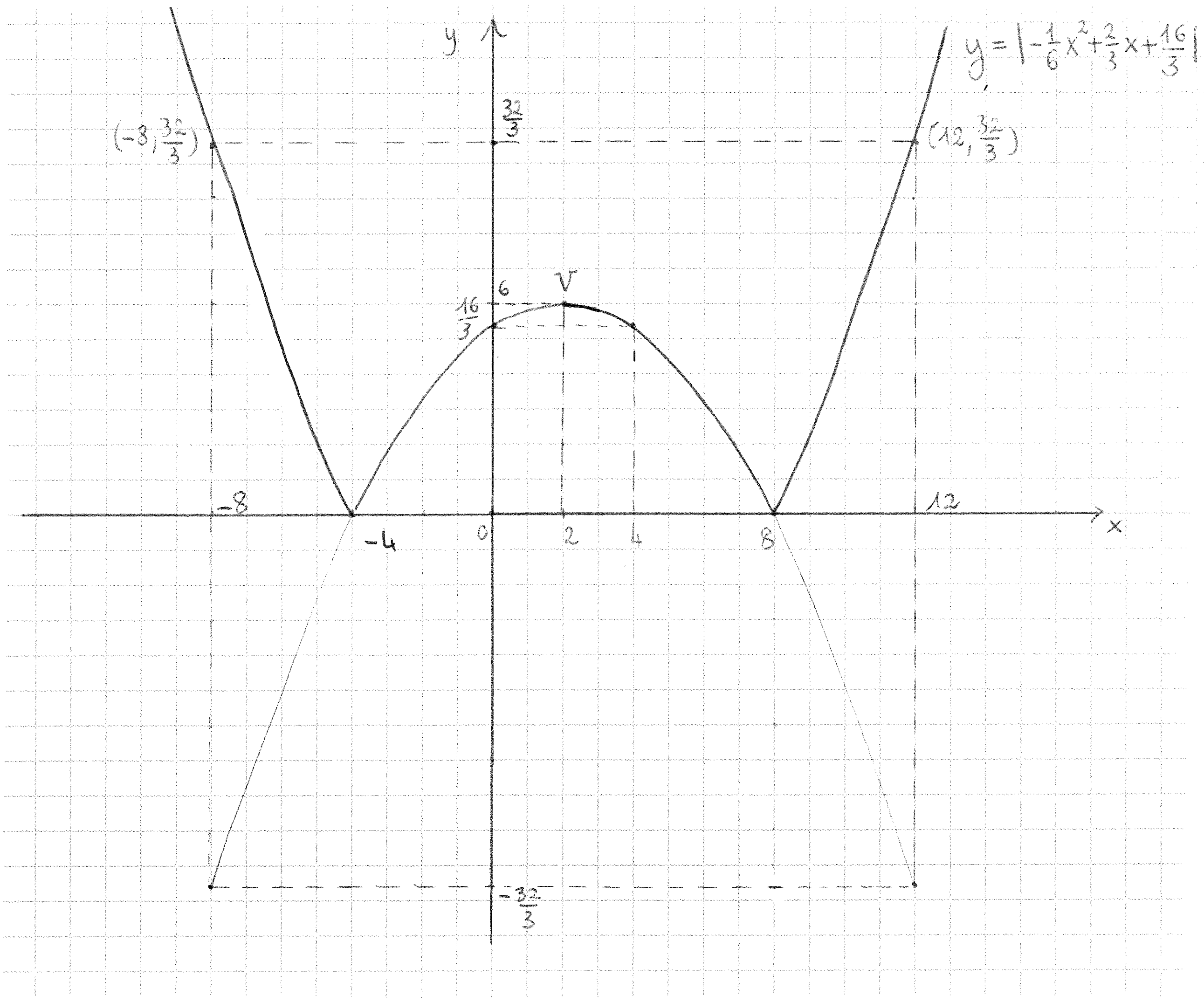
è rivolta verso il basso, $\cap$ asse x per $\frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{16}{3} = 0 \iff x^2 - 4x - 32 = 0$

$\iff x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{1} = 2 \pm 6 \iff x_1 = -4$ o $x_2 = 8$.

Passa per $(0, \frac{16}{3})$ e per simmetria per $(4, \frac{16}{3})$, in più per $(12, -\frac{32}{3})$ e per simmetria per $(-8, -\frac{32}{3})$. Quindi

$\hookrightarrow y = -\frac{1}{\cancel{6}} \cdot \cancel{144}^{24} + 8 + \frac{16}{3} = -24 + 8 + \frac{16}{3} = -16 + \frac{16}{3} = -\frac{32}{3}$

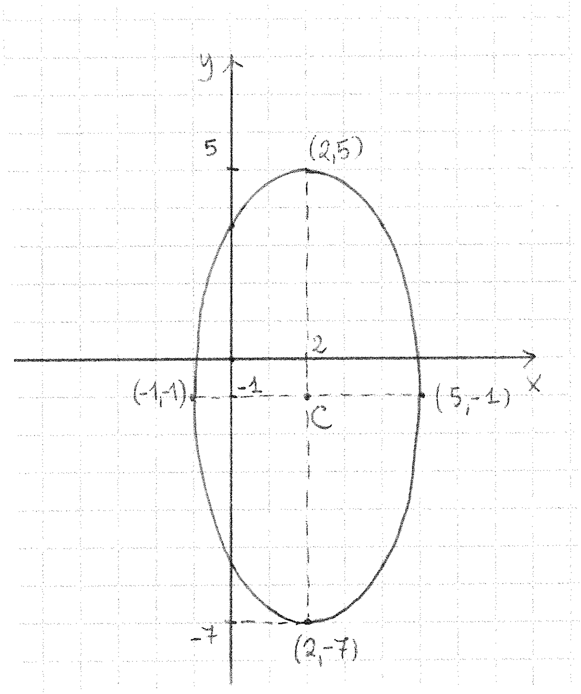
$f(-8) = f(12) = \frac{32}{3}$.



6) a) $4x^2-16x+y^2+2y=19 \qquad 4(x^2-4x)+(y+1)^2-1=19$

$4(x-2)^2-16+(y+1)^2-1=19 \qquad 4(x-2)^2+(y+1)^2=19+16+1=36$

$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{36}=1$ si tratta dell'ellisse di $C(2,-1)$ e semiassi $a=3$, $b=6$.



b) $x^2-4y^2=-4 \quad 4y^2-x^2=4$

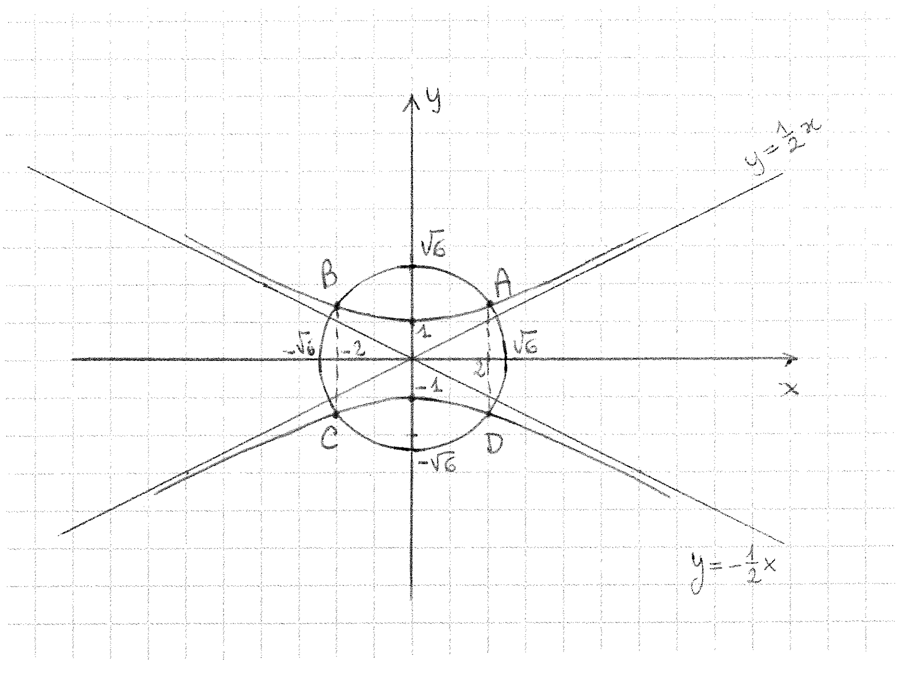
$y^2-\frac{x^2}{4}=1$ IPERBOLE di ASINTOTI $y=\pm\frac{1}{2}x \quad (a=2, b=1)$

passante per $(0,\pm1)$, $\cap$ asse x ϕ

$\begin{cases} 4y^2-x^2=4 \\ x^2+y^2=6 \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ y^2=6-x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} 24-4x^2-x^2=4 \\ \dots \end{cases}$

$\begin{cases} 5x^2=20 \\ \dots \end{cases} \begin{cases} x^2=4 \\ \dots \end{cases} \begin{cases} x=\pm2 \\ y^2=2 \end{cases} \begin{cases} x=\pm2 \\ y=\pm\sqrt{2} \end{cases}$

intersezioni $\underset{A}{(2,\sqrt{2})}\ \underset{B}{(-2,\sqrt{2})}\ \underset{C}{(-2,-\sqrt{2})}\ \underset{D}{(2,-\sqrt{2})}$

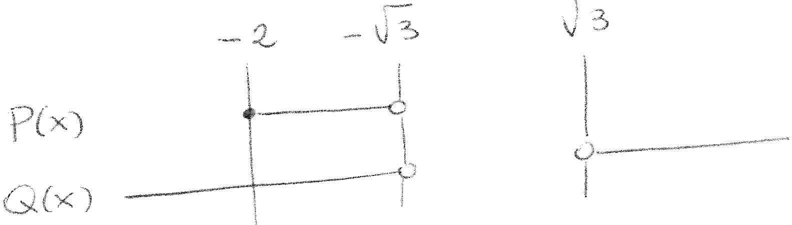


7) a) $A=[-2,-\sqrt{3}[\quad B=]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

(1ª) $\forall x\in\mathbb{R} \quad x\in A \Rightarrow x^2>3$

$x^2\geq 3 \Leftrightarrow x<-\sqrt{3}$ o $x>\sqrt{3}$

quindi la proposizione è VERA perchè detti $P(x)=$"$x\in A$"
$Q(x)=$"$x^2>3$"



tutti gli x che rendono vera P(x) rendono vera anche Q(x), ossia non c'è nessun x tale che P(x) sia vera e Q(x) falsa come servirebbe per dimostrare che $\forall x \; P(x)\Rightarrow Q(x)$ sia falsa.

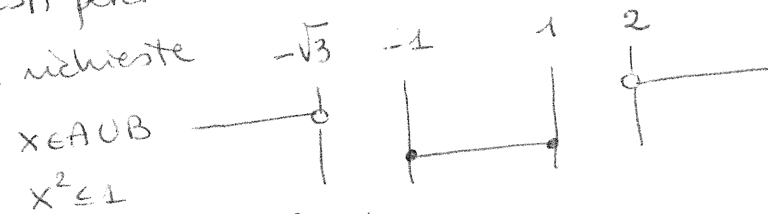
Negazione $\exists x: \quad x\in A$ E $x^2\leq 3$ che è FALSA
$\exists x: \quad x\in[-2,-\sqrt{3}[$ E $(-\sqrt{3}\leq x\leq\sqrt{3})$

perchè l'intersezione tra $[-2,\sqrt{3}[$ e $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$ è VUOTA.

(2ª) $\exists x\in\mathbb{R}: \quad (x\in A\cup B)$ E $(x^2\leq 1)$

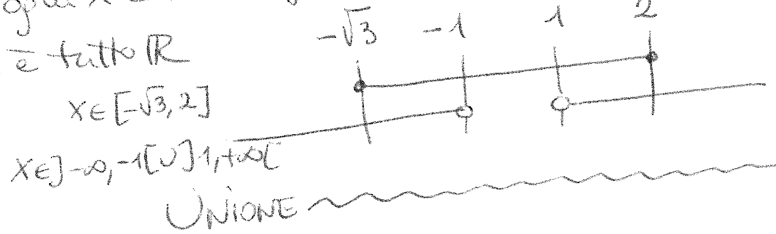
$x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in]-\infty,-\sqrt{3}[\cup]2,+\infty[\qquad x^2\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$

quindi la proposizione è FALSA perchè non esiste nessun valore di x che verifichi entrambe le richieste



Negazione $\forall x\in\mathbb{R}$: NON $(x\in A\cup B)$ O NON $(x^2\leq 1)$
$\forall x\in\mathbb{R}$: $x\in[-\sqrt{3},2]$ O $(x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[)$

La proposizione è vera perchè ogni $x\in\mathbb{R}$ verifica almeno una delle due richieste in quanto l'unione è tutto $\mathbb{R}$



c) Per non considerare proprio l'esempio più banale $f(x)=g(x)=x$ con $(f\cdot g)(x)=x^2$ non iniettiva, possiamo prendere ad esempio $f(x)=x^3$, $g(x)=x$ (entrambe iniettive in quanto strettamente crescenti) e ottenere $(f\cdot g)(x)=x^4$ NON iniettiva in quanto $\forall K>0$ ci sono due controimmagini $(f\cdot g)^{-1}(K)=\{\pm\sqrt[4]{K}\}$